

О ВИНТОВЫХЪ ПЕРЕМѢЩЕНІЯХЪ

ТВЕРДАГО ТѢЛА, СВЯЗИ КОТОРАГО

ВЫРАЖАЮТСЯ НЕРАВЕНСТВАМИ.

И. О. С О М О В А.

Оттискъ изъ „Варшавскихъ Университетскихъ Извѣстій“, 1896 г.

ВАРШАВА.

Типографія Варшавскаго Учебнаго Округа. Краковское Предмѣстье, № 3.

1896.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета.

Ректоръ *П. И. Ковалевскій.*

О Г Л А В Л Е Н І Е .

	<i>Стр.</i>
Введеніе	1
Одна опорная поверхность	9
Двѣ опорныхъ поверхности	12
Три опорныхъ поверхности	29
Четыре опорныхъ поверхности	53
Пять опорныхъ поверхностей	76
Шесть опорныхъ поверхностей	83
Семь и болѣе опорныхъ поверхностей	88

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

<i>Стран.:</i>	<i>Строка сверху;</i>	<i>Стоитъ:</i>	<i>Должно быть:</i>
17	22	$(P_1 P_2)$	$(P_1' P_2)$
"	"	$(P_1' P_2')$	$(P_1 P_2')$
"	23	$(P_1 P_2')$	$(P_1' P_2')$
19	28	$\delta_1 tg \varphi_1$	$\delta_1 tg \varphi_1$
21	36	неравенству	неравенствамъ
22	25	$C_1 AD$	$CA_1 D$
"	34	O	C
39	21	BDF	BDC
42	9	δ_3	δ_2
59	17	$tg \varphi_4$	$tg \varphi_4$

Кромѣ того на чертежѣ XLIV, стр. 66 вмѣсто (— + — —) должно стоять (— — + —).

О ВИНТОВЫХЪ ПЕРЕМѢЩЕНІЯХЪ ТВЕРДАГО ТѢЛА, СВЯЗИ КОТОРАГО ВЫРАЖАЮТСЯ НЕРАВЕНСТВАМИ.

П. О. Сомова.

1. **Предметъ изслѣдованія.** Системы винтовыхъ скоростей, остающихся для твердаго тѣла возможными, когда оно подчинено удерживающимъ связямъ, т. е. такимъ, условія которыхъ не содержатъ знаковъ неравенствъ, хорошо изслѣдованы. Но въ изслѣдованіи перемѣщеній твердаго тѣла при такихъ связяхъ, условія которыхъ кромѣ знака равенства содержатъ и знаки неравенствъ, еще далеко не достигнуто желаемой полноты. Въ настоящей работѣ, которая имѣетъ цѣлью изученіе винтовыхъ скоростей въ случаѣ связей послѣдняго рода, принята за основную форму связи твердая неподвижная поверхность, къ которой твердое тѣло можетъ или касаться или отъ нея отходить. Извѣстно, что не всякая связь, ограничивающая движеніе твердаго тѣла, поскольку она выражается какою-либо зависимостью между его кинематическими элементами, можетъ быть осуществлена въ видѣ такой твердой, неподвижной поверхности. *Томсонъ* и *Тэтъ* въ своемъ сочиненіи „*A treatise on natural philosophy*“ первые обратили на это вниманіе и дали примѣръ такого ограниченія свободы твердаго

тѣла, которое не можетъ быть достигнуто прикасаніемъ его къ поверхности *). Тѣмъ не менѣ этотъ частный видъ связи играетъ первенствующую роль во всѣхъ вопросахъ механики твердаго тѣла, такъ какъ на практикѣ ограниченіе въ движеніи его всегда достигается при помощи связей, которыя приводятся къ касанію тѣла къ одной или къ нѣсколькимъ твердымъ поверхностямъ. Важность этого вида связей увеличивается еще тѣмъ обстоятельствомъ, что если имѣется *несколько* связей, то, какого-бы общаго вида онѣ ни были, онѣ всегда могутъ быть въ дѣйствительности замѣнены столькими-же неподвижными поверхностями **); на практикѣ-же, напр. въ теоріи механизмовъ, лишь въ крайне рѣдкихъ случаяхъ приходится ограничиваться *одной* связью. Эти соображенія позволяютъ при изученіи возможныхъ перемѣщеній твердаго тѣла, подчиненнаго нѣсколькимъ *неудерживающимъ* связямъ, т. е. такимъ связямъ, которыя въ своемъ аналитическомъ выраженіи содержатъ знаки неравенствъ, представлять себѣ, не нарушая общности вопроса, что эти связи механически осуществлены въ видѣ твердыхъ и неподвижныхъ поверхностей, на которыя твердое тѣло при своемъ движеніи опирается, причемъ оно можетъ и отходить отъ каждой изъ этихъ поверхностей, насколько это позволяютъ остальные поверхности. Такія поверхности мы будемъ называть *опорными* (Stützflächen).

Для случая одной связи будетъ приняты во вниманіе и болѣе общій случай (§ 5); притомъ-же пріемъ, который будетъ ниже изложенъ, легко примѣняется къ общему виду связей; нарушается при этомъ только до нѣкоторой степени наглядность представленія возможныхъ винтовыхъ осей, столь важная въ вопросахъ, подобныхъ изучаемому.

Систематическое изученіе вопроса объ ограниченіи движенія твердаго тѣла помощью опоръ (Stützen) встрѣчается

*) § 201.

**) Въ случаѣ двухъ связей возможность этого обуславливается дѣйствительностью корней нѣкотораго квадратнаго уравненія; въ случаѣ-же трехъ и болѣе связей такое замѣненіе всегда возможно. См. объ этомъ: *Г. Соловь. Рациональная механика, ч. I, § 179.*

впервые, насколько мнѣ извѣстно, у *Рёло*, который кладетъ его въ своей „*Theoretische Kinematik*“ *) въ основаніе при изученіи кинематическихъ паръ. Но при этомъ онъ разсматриваетъ только случай движенія твердаго тѣла параллельно плоскости; для болѣе-же общаго случая движенія онъ ограничивается однимъ весьма частнымъ примѣромъ. *Риттерсхаузъ* **), *Бенъ* ***), *Гразхофъ* ****) приводятъ нѣкоторые дополненія, но тоже не даютъ сколько-нибудь систематическаго изслѣдованія самаго общаго случая. Съ наибольшою обстоятельностью и строгостью этотъ вопросъ для случая движенія параллельно плоскости разбирается *Бурместеромъ* *****); но онъ вовсе не касается другихъ болѣе общихъ случаевъ движенія твердаго тѣла, такъ какъ для изучаемыхъ имъ механизмовъ, исключительно двигающихся параллельно плоскости, въ этомъ не было надобности. Вообще одна изъ причинъ, почему до сихъ поръ не сдѣлано обстоятельнаго изслѣдованія для самаго общаго случая, въ которомъ основнымъ кинематическимъ элементомъ является винтовая скорость, состоитъ повидимому въ томъ, что вопросъ объ опорныхъ поверхностяхъ ставился постоянно въ связи съ теоріею механизмовъ, въ которой механизмы, имѣющіе направляющую плоскость, или также механизмы, члены которыхъ имѣютъ неподвижную точку, играютъ, какъ по своему практическому значенію такъ и по простотѣ изслѣдованія, столь первенствующую роль въ сравненіи съ остальными, что до сихъ поръ не представлялось существенной потребности въ изслѣдованіи поставленнаго выше вопроса въ самомъ общемъ видѣ. Притомъ-же такое наглядное геометрическое изображеніе, какое дается въ вышеуказанныхъ сочиненіяхъ въ случаѣ плоскаго движенія для областей центровъ вращенія, и которое можетъ быть сдѣлано и для случая движенія тѣла около точки на сферѣ для полюсовъ вращеній,—въ общемъ случаѣ, когда

*) §§ 18, 19 и 20.

***) *Civilingenieur*, 1875 г. стр. 438.

****) *Civilingenieur*, 1876 г. стр. 571.

*****) *Theoretische Maschinenlehre*, II, 1883 г. стр. 21.

*****) *Lehrbuch der Kinematik*. 1886 г. стр. 256.

основнымъ кинематическимъ элементомъ является винтовая скорость, непосредственно невозможно, такъ какъ винтъ опредѣляется пятью независимыми величинами.

Наглядное геометрическое изображение областей для элементовъ возможныхъ перемѣщеній служить не только къ облегченію усвоенія результатовъ, но представляетъ существенное условіе для выясненія самыхъ важныхъ особенностей вопроса. Поэтому производить изслѣдованіе о неустойчивающихъ связяхъ аналитическимъ путемъ представляло-бы работу неблагоприятную. Задача состояла-бы въ томъ, чтобы разобратся въ системѣ неравенствъ, содержащихъ линейнымъ образомъ шесть, или въ крайнемъ случаѣ пять перемѣнныхъ, могущихъ принимать какъ положительныя такъ и отрицательныя значенія; но даже въ простѣйшихъ случаяхъ, если будутъ опредѣлены аналитически области для координатъ винта и его параметра, это мало разъяснить сущность вопроса, пока результатамъ не будетъ дано нагляднаго геометрическаго представленія. Практическое-же примѣненіе ихъ, напр. въ теоріи механизмовъ, едва-ли мыслимо безъ такого представленія. Эти соображенія заставляютъ искать непосредственныхъ геометрическихъ пріемовъ, какъ это и дѣлали уже *Рѣло*, *Бурместергъ* и др. Понятно, что при этомъ неизбѣжно разложеніе пяти независимыхъ кинематическихъ элементовъ *) по крайней мѣрѣ на двѣ группы. Легко видѣть, что разложеніе ихъ на элементы поступательнаго и на элементы вращательнаго перемѣщенія, какъ это дѣлалось въ приведенныхъ выше сочиненіяхъ для частныхъ случаевъ, было-бы теперь неудобно; такъ какъ, найдя возможныя области для каждой изъ этихъ двухъ группъ въ отдѣльности, пришлось-бы опять ихъ разсматривать въ совокупности. Дѣйствительно, если для тѣла невозможно въ отдѣльности поступательное перемѣщеніе по нѣкоторому направленію и вращательное около оси нѣкотораго другаго направленія, то отсюда еще не слѣдуетъ, чтобы не была возможна нѣкоторая комбинація этихъ двухъ

*) Пяти а не шести потому, что абсолютная величина скорости или перемѣщенія въ этихъ вопросахъ никакой роли не играетъ.

перемѣщеній. Производя-же такія комбинаціи, мы потеряемъ опять всю введенную раньше наглядность представленія. Ввиду этого мы будемъ оперировать непосредственно падеъ винтовую скоростью, а элементы, которыми она опредѣляется, разлагать на двѣ группы слѣдующимъ образомъ, цѣлесообразность котораго выяснится изъ дальнѣйшаго изложенія: 1) Точка на поверхности шара, описаннаго произвольнымъ радіусомъ, будетъ опредѣлять направленіе угловой скорости; а именно, это направленіе будетъ опредѣляться направленіемъ шароваго радіуса, проведеннаго къ этой точкѣ; этотъ шаръ мы будемъ называть *шаромъ параметровъ*, такъ какъ положеніе точекъ на этомъ шарѣ, какъ это будетъ ниже показано, находится въ связи съ тѣми неравенствами, которымъ будетъ подчиненъ параметръ возможной винтовой скорости. 2) Точки на плоскости, перпендикулярной къ проведенному радіусу шара, будутъ служить для изображенія параллельныхъ между собою винтовыхъ осей. Нѣкоторыя другія, вспомогательныя построенія будутъ указаны ниже въ своемъ мѣстѣ.

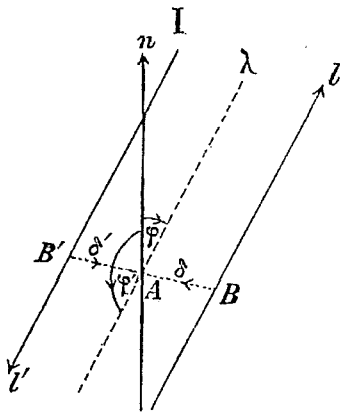
Относительно формы двигающагося тѣла мы не будемъ дѣлать никакихъ опредѣленныхъ предположеній; но вмѣстѣ съ тѣмъ, задавая какія-либо опредѣленные направленія и положенія нормалей къ нему въ точкахъ его касанія съ опорными поверхностями, будемъ предполагать, что форма тѣла это допускаетъ.

2. Обозначенія, условія относительно знаковъ и пр. Называя, какъ это принято, параметромъ винтовой скорости отношеніе поступательной скорости u вдоль оси винта l къ угловой скорости ω около оси, будемъ эту величину обозначать черезъ p и считать ее положительною, если поступательная и угловая скорости направлены въ одну и ту же сторону; при этомъ мы будемъ угловую скорость на винтовой оси откладывать въ ту сторону, откуда вращеніе кажется происходящимъ по часовой стрѣлкѣ.

Направленіе нормали n_i къ опорной поверхности Σ_i въ точкѣ M_i касанія къ ней поверхности S_i подвижнаго твердаго

тѣла будетъ считаться положительнымъ въ ту сторону, въ которую тѣло можетъ отходить отъ поверхности.

Пусть будутъ δ_i и φ_i кратчайшее разстояніе и уголъ между нормалю къ опорной поверхности и винтовой осью; δ_i всегда будетъ считаться положительнымъ и направленнымъ отъ l къ n_i ; величина-же угла φ_i , который будетъ разсматриваться въ предѣлахъ отъ 0 до π , будетъ опредѣляться въ зависимости отъ положенія винтовой оси относительно нормали слѣдующимъ образомъ.



Пусть будетъ AB (I) *) кратчайшее разстояніе между n и l ; проведя через A прямую λ , параллельную l , будемъ, глядя по направленію кратчайшаго разстоянія, т. е. отъ B къ A , уголъ φ отсчитывать по часовой стрѣлкѣ отъ n до первой встрѣчи съ λ . Такимъ образомъ у двухъ параллельныхъ винтовыхъ осей, l и l' , лежащихъ по разнымъ сторонамъ отъ нормали n , для одной изъ нихъ уголъ φ будетъ имѣть

одно значеніе, а для другой прямой онъ будетъ равенъ $\pi - \varphi$. Въ дальнѣйшемъ такое различіе будетъ весьма существенно.

Угломъ между нормалю и угловою скоростью всегда будетъ считаться уголъ между положительными ихъ направленіями; такъ-что для винтовыхъ осей одного и того-же направленія уголъ (n, ω) можетъ равняться или φ или $\pi - \varphi$, не только въ зависимости отъ направленія угловой скорости на винтовой оси, но также и смотря по положенію послѣдней относительно нормали.

3. Условіе, которому удовлетворяетъ винтовая скорость твердаго тѣла, касаніе котораго къ неподвижной поверхности не прерывается.

*) Римскія цифры служатъ для нумераціи чертежей

При всякомъ безконечно-маломъ перемѣщеніи тѣла, при которомъ поверхность S остается касательною къ поверхности Σ , точка M касанія перемѣщается по направлению, которое, если если пренебрегать безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ въ сравненіи съ величинами перемѣщеній точекъ тѣла, можно считать перпендикулярнымъ къ общей обѣимъ поверхностямъ нормали n . А именно, всякое перемѣщеніе S по Σ можетъ быть составлено: 1) изъ катанія, при которомъ мгновенная ось, проходя черезъ точку касанія, лежитъ въ общей обѣимъ поверхностямъ касательной плоскости, 2) изъ вращенія около нормали n и 3) изъ скольженія *). Первые два перемѣщенія слагаются въ вращеніе около оси, проходящей черезъ точку M , которая поэтому можетъ при этомъ вращеніи считаться неподвижною; при скольженіи-же можно считать перемѣщеніе точки M происходящимъ въ общей обѣимъ поверхностямъ касательной плоскости. Принимая это въ дальнѣйшемъ изложеніи, мы этиаъ дѣлаемъ упрощеніе, состоящее въ томъ, что оставляется безъ вниманія вопросъ о вліяніи на величину возможнаго перемѣщенія кривизны опорной поверхности или поверхности двигающагося тѣла. Послѣднія обстоятельства нужно было-бы принимать во вниманіе, если-бы мы стали дѣлать различіе между возможностью какого-либо конечнаго, хотя-бы и весьма малаго перемѣщенія и возможностью существованія соотвѣтственной винтовой скорости **).

Извѣстно, что если какая-нибудь точка прямой, принадлежащей твердому тѣлу, имѣетъ скорость къ ней перпендикулярную, то и всякая другая точка этой прямой обладаетъ тѣмъ-же свойствомъ. На основаніи этого, если какаа-либо прямая должна служить осью такого винтового перемѣщенія,

*) Волѣе подробное разложеніе см. у *Thomson a. Tail* „A treatise on natural philosophy“, § 110, *Бобылева* „О движеніи поверхности, прикасающейся къ другой поверхности, неподвижной“ Зап. Имп. Ак. Наукъ, 1887 г. II. *Солова*: „О перемѣщеніяхъ неизмѣняемой поверхности, прикасающейся къ одной или къ нѣсколькимъ неподвижнымъ поверхностямъ“. Варш. Унив. Изв. 1893 г.

***) Относительно плоскаго движенія см. объ этомъ: *Burmester* „Lehrbuch der Kinematik, §§ 111 и 112.

при которомъ не прерывалось-бы касаніе поверхностей, то параметръ винтовой скорости долженъ удовлетворять условію, чтобы скорость какой-нибудь точки нормали n была перпендикулярна къ послѣдней. Это показываетъ между прочимъ, что положеніе точки касанія на нормали, — если отказаться, какъ мы уже условились, отъ изученія вліянія, которое оказываетъ на размѣръ возможнаго перемѣщенія кривизна поверхностей, — никакой роли не играетъ. Такъ-что можно, вмѣсто того чтобы указывать опорную поверхность и мѣсто точки касанія ея къ двигающемуся тѣлу, прямо задавать направленіе общей обѣимъ поверхностямъ нормали и ея положеніе.

Разсмотримъ скорость v точки A , находящейся на общей нормали, при винтовомъ перемѣщеніи тѣла около оси l (I). Пусть будутъ v_1 и v_2 слагаемыя этой скорости въ зависимости отъ вращательной и поступательной слагаемыхъ винтоваго перемѣщенія; такъ-что

$$v \cos (vn) = v_1 \cos (v_1n) + v_2 \cos (v_2n); \quad (1)$$

причемъ

$$v_1 = \delta\omega, \quad v_2 = \pm p\omega. \quad (2)$$

Здѣсь при поступательной скорости поставленъ двойной знакъ, такъ какъ черезъ v_2 означена абсолютная величина скорости, и слѣдовательно верхній знакъ соотвѣтствуетъ положительному параметру p , а нижній — отрицательному. Если ω совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ l , т. е. съ тѣмъ направленіемъ, до котораго отсчитывается уголъ φ (§ 2), и $p > 0$, то

$$(v_1n) = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad (v_2n) = \varphi, \quad (3)$$

и мы имѣемъ:

$$v \cos (vn) = \omega (p \cos \varphi - \delta \sin \varphi). \quad (4)$$

При обратномъ направленіи ω :

$$(v_1n) = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad (v_2n) = \pi - \varphi, \quad (5)$$

и тогда

$$v \cos (vn) = -\omega (p \cos \varphi - \delta \sin \varphi). \quad (6)$$

Легко видѣть, что эти формулы будутъ справедливы и при $p < 0$, если принять во вниманіе сказанное по поводу формулъ (2). Точно такъ-же онѣ остаются справедливыми и для оси l' , лежащей по другую сторону нормали n (1), если соблюдать указанное въ § 2 правило для отсчитыванія угла φ . Дѣйствительно, если ω совпадаетъ съ положительнымъ направлениемъ оси l' (которое прямо противоположно положительному направленію оси l) и $p > 0$, то

$$(v_1' n) = \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{3}{2} \pi - \varphi', \quad (v_2' n) = \pi - \varphi = \varphi'; \quad (7)$$

поэтому

$$v' \cos(v'n) = -v_1' \sin \varphi' + v_2' \cos \varphi' = \omega (p \cos \varphi' - \delta' \sin \varphi'); \quad (8)$$

при обратномъ-же направленіи ω :

$$(v_1' n) = \frac{\pi}{2} - \varphi = \varphi' - \frac{\pi}{2}, \quad (v_2' n) = \varphi = \pi - \varphi'; \quad (9)$$

такъ-что

$$v' \cos(v'n) = -\omega (p \cos \varphi' - \delta' \sin \varphi'). \quad (10)$$

При $p < 0$ и эти формулы не измѣняются, если принять во вниманіе сказанное по поводу формулъ (2).

Одна опорная поверхность.

4. Условіе для возможныхъ винтовыхъ скоростей.

Принимая во вниманіе, что проекція скоростей всѣхъ точекъ прямой, принадлежащей твердому тѣлу, на ея направленіе равны, легко видѣть изъ предыдущаго, что для твердаго тѣла, которое можетъ не только касаться къ поверхности Σ , но также и отходить отъ этой поверхности, скорость точки A должна удовлетворять условію

$$v \cos(vn) \geq 0; \quad (11)$$

такъ какъ это условіе необходимо для точки касанія обѣихъ поверхностей.

Разсматривая формулы (4), (6), (8) и (10) и исключая пока из разсмотрѣнія случаи, когда винтовая ось перпендикулярна къ нормали n , находимъ, что если ω образуетъ острый уголъ съ положительнымъ направлениемъ n , то неравенство (11) даетъ:

$$p \geq \delta \operatorname{tg} \varphi, \quad (12)$$

независимо отъ положенія винтовой оси даннаго направленія относительно нормали, при соблюденіи конечно правила для отсчитыванія угла φ ; точно такъ-же, если ω образуетъ съ n тупой уголъ, то условіе (11) приводится къ

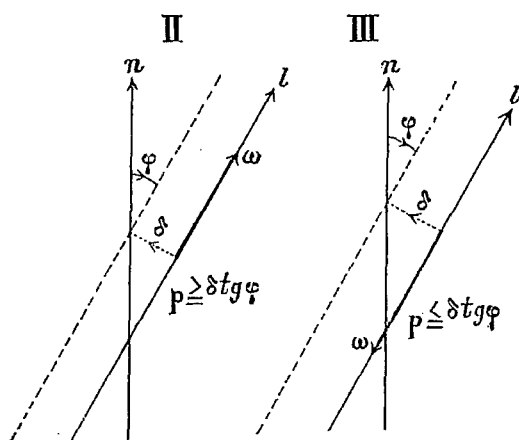
$$p \leq \delta \operatorname{tg} \varphi. \quad (13)$$

Этотъ результатъ будетъ служить основаніемъ при разборѣ всѣхъ случаевъ перемѣщенія твердаго тѣла, опирающагося на нѣсколько поверхностей; поэтому будетъ не лишнимъ его подробно формулировать:

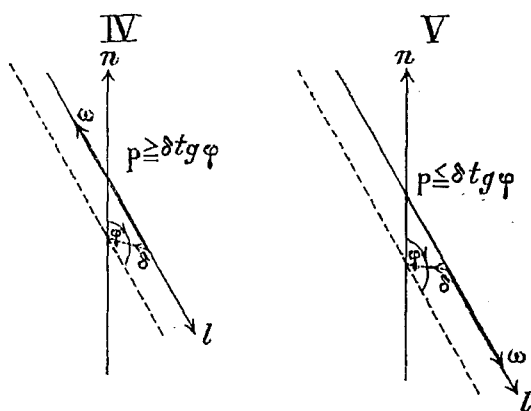
Въ случаѣ одной опорной поверхности для твердаго тѣла возможны винтовья перемѣщенія около всякой прямой; если угловая скорость на этой прямой образуетъ острый уголъ съ положительнымъ направлениемъ нормали къ опорной поверхности въ точкѣ касанія ея съ твердымъ тѣломъ, то параметръ винтовой скорости не меньше нѣкотораго предѣла, при обратномъ-же направленіи угловой скорости параметръ не превосходитъ этого предѣла. Величина этого предѣла для различныхъ винтовыхъ осей различна и опредѣляется произведеніемъ кратчайшаго разстоянія оси отъ нормали на тангенсъ угла между этими прямыми, который отсчитывается отъ положительнаго направленія нормали до первой встрѣчи съ винтовой осью по часовой стрѣлкѣ, если смотрѣть по направленію кратчайшаго разстоянія отъ винтовой оси на нормаль.

На чертежахъ (II), (III), (IV) и (V) представлены четыре могущіе здѣсь встрѣтиться слѹчай при одномъ и томъ-же наклоненіи винтовой оси къ нормали. Случаи (IV) и (V) тождественны съ тѣми, которые получились-бы, если-бы въ слу-

чаяхъ (II) и (III) винтовая ось была перемѣщена параллельно самой себѣ, по направленію кратчайшаго разстоянія, по другую сторону нормали.



Если угол φ дѣлается прямымъ, то въ первомъ и четвертомъ случаяхъ для p остаются возможными только значения $\pm \infty$; во второмъ-же и третьемъ случаяхъ p можетъ имѣть какія угодно значенія.



5. Винтовые скорости съ параметромъ, равнымъ нулю или безконечности.

Для того, чтобы около какой-нибудь прямой было простое вращеніе ($p = 0$), необходимо, чтобы въ неравенствѣ (12) величина $\delta \operatorname{tg} \omega$ была

отрицательная, а въ неравенствѣ (13)—положительная. Поэтому, для того чтобы около какой-нибудь прямой l заданнаго направленія было возможно вращеніе съ угловою скоростью, образующею съ n острый уголъ, нужно, чтобы ось l имѣла такое расположеніе относительно n , при которомъ уголъ φ оказался бы тупымъ; при обратномъ направленіи ω требуется такое положеніе оси, чтобы уголъ φ былъ острымъ. Такимъ образомъ около всякой прямой возможно простое вращеніе, но только въ одну сторо-

ну. При этомъ вся система параллельныхъ между собою прямыхъ какого-нибудь даннаго направленія раздѣляется на двѣ группы: около прямыхъ одной группы возможно вращеніе въ одну сторону, а около прямыхъ другой группы — въ сторону противоположную; эти группы раздѣляются плоскостью, проходящею черезъ нормаль n и параллельною заданному направленію осей вращенія. Исключеніе составляютъ прямыя, лежащія въ этой плоскости: около нихъ остается возможнымъ вращеніе въ обѣ стороны, какъ вообще около всѣхъ прямыхъ, пересѣкающихъ нормаль n .

Что касается до поступательныхъ перемѣщеній ($p = \infty$), то легко непосредственно видѣть, что онѣ возможны по всѣмъ направленіямъ, образующимъ съ положительнымъ направленіемъ нормали уголъ, не превосходящій прямого *).

Двѣ опорныхъ поверхности.

6. Условія для возможныхъ винтовыхъ скоростей. Начиная съ настоящаго случая, двухъ опорныхъ поверхностей, направленія возможныхъ винтовыхъ осей будемъ опредѣлять

*) Когда неудерживающая связь болѣе общаго вида, чѣмъ опорная поверхность (см. § 1), то условіе возможности винтового перемѣщенія можетъ быть выведено подобнымъ предыдущему путемъ разсужденій, если принять во вниманіе, что въ случаѣ одной удерживающей связи всегда существуетъ одинъ винтъ, по отношенію къ которому всѣ винты возможные будутъ взаимными [Ball (Gravelius), „Mechanik starrer System“, стр. 357]. Пусть будетъ P параметръ этого винта; тогда условіе взаимности выразится такъ:

$$(p + P) \cos \varphi - \delta \sin \varphi = 0, \quad (a)$$

гдѣ p , φ и δ имѣютъ тѣ-же значенія, какъ и раньше. Если связь неудерживающая, то въ условіи (a) къ знаку равенства присоединяется знакъ неравенства; такъ-что для p , смотря по направленію угловой скорости винтового перемѣщенія, получается одно изъ двухъ условій:

$$p \geq \delta \operatorname{tg} \varphi - P$$

или

$$p \leq \delta \operatorname{tg} \varphi - P.$$

Въ дальнѣйшемъ изслѣдованіе мало отличается отъ изслѣдованія, сдѣланнаго для случая, когда связь представляется въ видѣ опорной поверхности. По мотивамъ, высказаннымъ уже въ § 1, можно его не продолжать.

точками на поверхности шара параметровъ, какъ это было уже указано въ § 1, а положенія возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія—точками на плоскости, перпендикулярной къ этому направленію. Пусть будутъ n_1 и n_2 направленія положительныхъ нормалей къ двумъ опорнымъ поверхностямъ въ точкахъ ихъ касанія къ двигающемуся тѣлу. По отношенію къ направленію угловой скорости теперь нужно различать четыре случая, которые можно раздѣлять на три группы:

$$1\text{-я группа: } (n_1 \omega) < \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) < \frac{\pi}{2}; \quad (14)$$

$$2\text{-я группа: } (n_1 \omega) < \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) > \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

$$\text{или} \quad (n_1 \omega) > \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) < \frac{\pi}{2}; \quad (16)$$

$$3\text{-я группа: } (n_1 \omega) > \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) > \frac{\pi}{2}, \quad (17).$$

Случай, когда одинъ или оба эти угла дѣлаются прямыми, будутъ разобраны отдѣльно.

Вышеуказаннымъ четыремъ парамъ неравенствъ соотвѣтствуютъ неравенства для параметра возможной винтовой скорости, согласно сказанному въ § 4:

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2; \quad (18)$$

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (19)$$

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2; \quad (20)$$

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (21)$$

На шарѣ параметровъ этимъ четыремъ парамъ неравенствъ соотвѣтствуютъ четыре области, получаемыя слѣдующимъ образомъ. Проведемъ черезъ центръ шара плоскости A_1CB_1D и A_2CB_2D (VI), перпендикулярныя къ n_1 и n_2 . Область шаровой поверхности A_2CDB_1 опредѣляетъ такія направленія угловыхъ скоростей, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ (14). Пусть будетъ Q какая-нибудь точка этой

предыдущему и слѣдовательно принадлежитъ области (17), то параметръ винтовой скорости около той-же оси долженъ удовлетворять неравенствамъ (21), т. е. не превосходить меньшей изъ величинъ (22). Итакъ, *около всякой винтовой оси, направление которой принадлежитъ сопряженнымъ областямъ (14) и (17), возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, величина котораго внѣ предѣловъ (22), и съ угловою скоростью, которая можетъ имѣть то или другое направленіе, смотря по тому, съ которой стороны отъ предѣловъ (22) находится величина параметра.*

Предѣлы (22) различны не только для осей различнаго направленія, но и для осей даннаго направленія, различно расположенныхъ относительно двухъ нормалей. У каждаго направленія существуютъ оси, для которыхъ предѣлы (22) дѣлаются равными. Около такихъ осей возможна винтовая скорость со всякою величиною параметра, причемъ угловая скорость можетъ имѣть то или другое направленіе, смотря по тому, будетъ-ли параметръ больше или меньше совпавшихъ предѣловъ (22); и только если онъ равенъ этимъ предѣламъ, угловая скорость можетъ имѣть оба направленія. Указанныя оси образуютъ плоскость, такъ какъ при заданномъ направленіи осей положеніе ихъ, обусловливаемое равенствомъ величинъ (22), опредѣляется постоянствомъ отношенія $\delta_1 : \delta_2$ *).

8. Винтовыя оси, соответствующія областямъ (15) и (16). Предполагая неравенства (15), имѣемъ для параметра винтовой скорости условія (19). Для того, чтобы при какомъ-нибудь направленіи, принадлежащемъ области (15), условія (19) были совмѣстны, положеніе винтовой оси должно удовлетворять неравенству

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (23)$$

На всѣхъ такихъ прямыхъ возможна винтовая скорость съ параметромъ, заключеннымъ между предѣлами (22), и съ

*) Подробнѣе объ этой плоскости, играющей особенно важную роль для осей, принадлежащихъ областямъ (15) и (16), а также построеніе ея см. въ § 9.

угловою скоростью, образующею съ n_1 острый, а съ n_2 тупой уголъ. На остальныхъ прямыхъ того-же направленія такія винтовья скорости невозможны, но зато возможны винтовья скорости съ обратнымъ направленіемъ угловой скорости. Дѣйствительно, это обратное направленіе принадлежитъ области (16), сопряженной съ областью (15); для нея имѣютъ мѣсто неравенства (20). Для того, чтобы эти неравенства были совмѣстны, положеніе винтовой оси должно удовлетворять неравенству, обратному неравенству (23); а это возможно для всѣхъ прямыхъ даннаго направленія, на которыхъ не была возможна винтовая скорость, принадлежащая области (15).

Итакъ, если одинъ изъ угловъ ($n_1 \omega$), ($n_2 \omega$) острый, а другой тупой, то на всѣхъ прямыхъ, удовлетворяющихъ этому условію, возможны винтовья скорости; но винтовья оси разделяются теперь на двѣ группы: для одной изъ нихъ направленіе возможныхъ вращеній определяется условіями (15), а для другой—условіями (16). Для прямыхъ обѣихъ группъ параметръ винтовой скорости заключенъ между двумя предѣлами (22), которые впрочемъ для различныхъ прямыхъ того-же направленія различны.

Въ частности, на прямыхъ, для которыхъ

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (24)$$

возможна винтовая скорость только съ параметромъ, равнымъ этому произведенію, но зато угловая скорость можетъ имѣть на нихъ оба направленія. Это слѣдуетъ также изъ того, что всѣ такія прямыя принадлежатъ тому комплексу второго порядка, который содержитъ всѣ винтовья оси, удовлетворяющія условію, чтобы при безконечно-маломъ перемѣщеніи около нихъ сохранялось касаніе тѣла къ двумъ неподвижнымъ поверхностямъ. Всѣ прямыя какого-либо даннаго направленія, удовлетворяющія условію (24), образуютъ плоскость, построеніе и значеніе которой подробно указано въ слѣдующемъ §.

9. **Исслѣдованіе областей возможныхъ винтовыхъ скоростей на осяхъ даннаго направленія, удовлетворяющаго условіямъ (15) и (16).** Вспомнимъ правило для от-

считыванія угла φ (§ 4); въ системѣ параллельныхъ прямыхъ для однихъ изъ нихъ углы φ_1 и φ_2 могутъ быть острыми, а для другихъ — тупыми: это будетъ обуславливаться тѣмъ, съ которой стороны отъ каждой изъ нормалей n_1 и n_2 прямая проходить. Поэтому для какого-нибудь направленія системы параллельныхъ прямыхъ, принадлежащаго сопряженнымъ областямъ (15) и (16), нужно различать четыре случая:

$$\varphi_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 < \frac{\pi}{2}; \quad (25)$$

$$\varphi_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 > \frac{\pi}{2}; \quad (26)$$

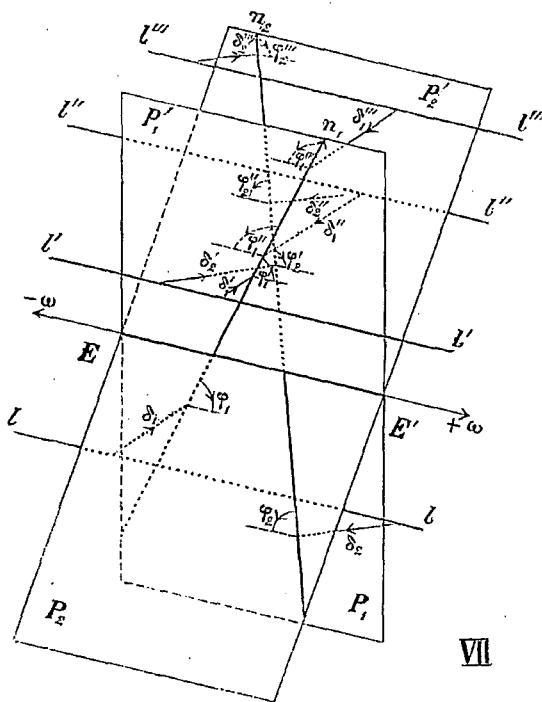
$$\varphi_1 > \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 < \frac{\pi}{2}; \quad (27)$$

$$\varphi_1 > \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 > \frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Разберемъ эти случаи подробнѣе *). Для этого черезъ нормали n_1 и n_2 проведемъ плоскости P_1P_1' и P_2P_2' , параллельныя заданному направленію прямыхъ; эти плоскости пересѣкутся по прямой EE' (VII), тоже параллельной данной системѣ прямыхъ. Эту прямую будемъ называть *осевою линіей*, а плоскости P_1P_1' и P_2P_2' — *плоскостями нормалей*. Легко видѣть, что четыремъ случаямъ (25), (26), (27) и (28) соотвѣтствуютъ четыре области угловъ, образуемыхъ плоскостями нормалей. Для какой-нибудь прямой l , лежащей въ двугранномъ углѣ (P_1P_2) , выполняется условіе (25), для прямой l' въ углѣ (P_1P_2) — условіе (26), для прямой l'' въ углѣ $(P_1'P_2')$ — условіе (27) и наконецъ для прямой l''' въ углѣ (P_1P_2') — условіе (28). Для возможно бѣльшей ясности на чертежѣ VII границы плоскостей P_1P_1' и P_2P_2' взяты въ видѣ прямоугольниковъ, стороны которыхъ соотвѣтственно параллельны и перпендикулярны къ осевой линіи EE' ; тогда можно видѣть, что нормаль n_1 наклонена подъ острымъ угломъ къ направленію EE' ,

*) Случаи, когда φ_1 или φ_2 или оба угла дѣлаются прямыми, будутъ разсматриваться отдѣльно.

а нормаль n_2 — под тупым углом, и проверить вышесказанное, придерживаясь правила § 4. Далее, если угловая скорость имеет направление EE' , то для нее выполнено условие (15), а если она имеет направление $E'E$, — то условие (16). Положим, что ω имеет направление EE' , и найдем, которые из системы параллельных прямых l, l', l'', l''' могут при этом служить возможными винтовыми осями, т. е. для которых из них выполняется неравенство (23).



VII

В двугранном угле $(P_1'P_2)$ величина $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ положительная, а $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ — отрицательная; поэтому неравенство (23) не для одной из прямых этой области не возможно. В угле (P_1P_2') наоборот $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 < 0$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 > 0$; поэтому неравенство (23) выполняется для всех прямых этой области. В остальных двух углах, (P_1P_2) и $(P_1'P_2')$, величины $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ имеют одинаковый знак. Проведем в угле (P_1P_2) , в котором эти величины положительны, через осевую линию плоскость S_{12} , делящую угол (P_1P_2) на части, синусы которых обратно пропорциональны тангенсам углов φ_1 и φ_2 . Эту плоскость, которая будет иметь существенное значение в дальнейшем, будем называть *граничной плоскостью*. Для всех прямых данного направления l , лежащих в этой плоскости, $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ равны; для прямых, лежащих в угле (P_1S_{12}) , вы-

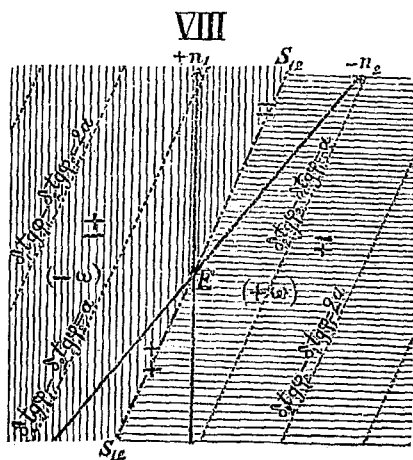
полнено условие (15), а если она имеет направление $E'E$, — то условие (16). Положим, что ω имеет направление EE' , и найдем, которые из системы параллельных прямых l, l', l'', l''' могут при этом служить возможными винтовыми осями, т. е. для которых из них выполняется неравенство (23). В двугранном угле $(P_1'P_2)$ величина $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ положительная, а $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ — отрицательная; поэтому неравенство (23) не для одной из прямых этой области не возможно. В угле (P_1P_2') наоборот $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 < 0$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 > 0$; поэтому неравенство (23) выполняется для всех прямых этой области. В остальных двух углах, (P_1P_2) и $(P_1'P_2')$, величины $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ имеют одинаковый знак. Проведем в угле (P_1P_2) , в котором эти величины положительны, через осевую линию плоскость S_{12} , делящую угол (P_1P_2) на части, синусы которых обратно пропорциональны тангенсам углов φ_1 и φ_2 . Эту плоскость, которая будет иметь существенное значение в дальнейшем, будем называть *граничной плоскостью*. Для всех прямых данного направления l , лежащих в этой плоскости, $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ равны; для прямых, лежащих в угле (P_1S_{12}) , вы-

полняется условіе (23); эта часть угла (P_1P_2) и заключаетъ въ себѣ возможныя винтовыя оси заданнаго направленія. Продолжая плоскость S_{12} внутрь угла $(P'_1P'_2)$, въ которомъ обѣ величины $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ отрицательныя, найдемъ, что условіе (23) выполняется для тѣхъ прямыхъ въ этомъ углу, которыя лежатъ въ области двуграннаго угла P'_2S_{12} . Соединяя это со сказаннымъ выше относительно угловъ (P'_1P_2) и $(P_1P'_2)$, убѣждаемся, что *всѣ прямыя даннаго направленія, лежащія по одну сторону граничной плоскости S_{12} , представляютъ возможныя винтовыя оси съ заданнымъ направленіемъ угловой скорости, удовлетворяющимъ условію (15)*. Легко путемъ, подобнымъ предыдущему, убѣдиться, что если угловая скорость должна имѣть направленіе (16), прямо противоположное предыдущему, то возможныя винтовыя оси будутъ лежать по другую сторону плоскости S_{12} , а прежнія оси сдѣлаются невозможными.

10. **Графическое изображеніе возможныхъ осей даннаго направленія.** При большемъ числѣ опорныхъ поверхностей перспективное изображеніе, подобное чертежу VII, становится неудобнымъ; поэтому мы будемъ его замѣнять сѣченіемъ, перпендикулярнымъ къ заданной системѣ параллельныхъ прямыхъ, условившись при этомъ въ слѣдующемъ. Чтобы отмѣтить, какъ наклонена нормаль n къ осевой линіи, будемъ на концѣ прямой, изображающей проекцію нормали на плоскость чертежа и вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдъ плоскости, содержащей эту нормаль и параллельной данному направленію, ставить значекъ $+n$ или $-n$; причемъ значекъ $(+)$ будетъ указывать, что положительный конецъ нормали n ближе къ наблюдателю, смотрящему на чертежъ, чѣмъ другой конецъ, а значекъ $(-)$ будетъ указывать противный случай. Въ областяхъ, на которыя раздѣляется плоскость чертежа вышеуказанными прямыми, будемъ писать знаки $(+)$ и $(-)$, соответственно тому, какіе знаки имѣютъ въ этихъ областяхъ величины $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \dots$; эти знаки будемъ писать по порядку нумераціи опорныхъ поверхностей. Наконецъ, области, содержащія слѣды тѣхъ *возможныхъ винтовыхъ осей*, кото-

рымъ соотвѣтствуетъ вращеніе, кажущееся для наблюдателя, смотрящаго на чертежъ, происходящимъ по часовой стрѣлкѣ, будемъ затушевывать горизонтальными штрихами, а возможные области съ обратнымъ направленіемъ угловой скорости—вертикальными штрихами. Для поясненія на чертежѣ VIII сдѣлано указаннымъ выше условнымъ образомъ изображеніе случая, представленнаго на чертежѣ VII.

Замѣтимъ слѣдующее правило, касающееся проведенія граничной плоскости и опредѣленія направленія угловой скорости, которая соотвѣтствуетъ винтовой скорости около осей, лежащихъ по ту или по другую сторону этой плоскости: 1) *Слѣдъ граничной плоскости S_{ik} проходитъ черезъ точку пересѣченія проекцій нормалей n_i и n_k (причемъ знаки у этихъ нормалей предполагаются противоположными, такъ какъ только при этомъ граничная плоскость имѣетъ то значеніе, для котораго она разсматривается) и лежитъ въ той парѣ образуемыхъ или вертикальныхъ угловъ, въ которыхъ знаки величинъ $\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i$ и $\delta_k \operatorname{tg} \varphi_k$ одинаковы, т. е. въ областяхъ (++) и (--)*; 2) *если уголъ между положительными концами прямыхъ n_i и n_k содержитъ знаки (--)*, то область винтовыхъ осей съ положительною угловою скоростью (+ ω), будетъ лежать съ той стороны S_{ik} , съ которой находится конецъ отрицательной прямой ($-n_2$ на чертежѣ VIII);



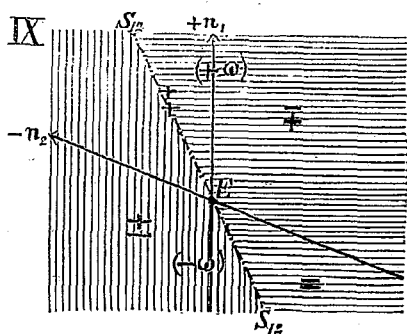
если-же вышеозначенный уголъ содержитъ знаки (++)

, то область (+ ω) будетъ находиться съ той стороны S_{ik} , съ которой находится конецъ положительной прямой (+ n_1 на чертежѣ IX).

Граничная плоскость S_{ik} имѣетъ еще значеніе для опредѣленія предѣловъ, въ которыхъ заключена величина ρ . Для вѣствъ осей даннаго направленія, лежащихъ съ пло-

скости, параллельной граничной, разность между этими предѣлами одинакова и пропорціональна разстоянню между этими плоскостями, хотя са-

мые предѣлы для различных осей одной и той-же плоскости и различны. Слѣды такихъ плоскостей изображены на чертежѣ VIII точечнымъ пунктиромъ. Винтовые оси, лежащія въ самой граничной плоскости, могутъ имѣть только опредѣленные значенія параметра, такъ какъ предѣлы



для него совпадаютъ; въ частности для винтовой оси, совпадающей съ осевою линіей (EE' на чертежѣ VII), $p = 0$. Угловая скорость, входящая въ составъ винтовой скорости на осяхъ, лежащихъ въ граничной плоскости, можетъ имѣть зато оба направленія.

Въ § 7 было указано существованіе такихъ плоскостей, что для лежащихъ въ нихъ винтовыхъ осей, принадлежащихъ областямъ (14) и (17), величины $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ дѣлаются равными. Оболо такихъ осей было возможно винтовое перемѣщеніе со всякимъ параметромъ. Эти плоскости аналогичны граничнымъ въ томъ отношеніи, что для нихъ предѣлы параметра совпадаютъ; но онѣ имѣютъ значеніе какъ-разъ обратное значенію граничныхъ плоскостей: въ одномъ случаѣ исчезаютъ невозможныя значенія параметра, а въ другомъ — возможныя значенія за исключеніемъ одного опредѣленнаго.

11. Зависимость положенія областей, указанныхъ въ предыдущемъ §, отъ направленія винтовой оси, удовлетворяющаго условіямъ (15) и (16). Положеніе плоскостей, содержащихъ нормали, и плоскости граничной зависятъ очевидно отъ того, какою точкою на сферѣ параметровъ (VI) опредѣляется направленіе угловой скорости и вмѣстѣ съ тѣмъ направленіе винтовой оси. Разсматривая на шарѣ (VI) область $A_1 CDA_2$, соответствующую неравенству (15), и со-

пряженную съ нею область B_1CDB_2 , и совершая обходъ по контуру первой изъ этихъ областей, находимъ слѣдующее. Для точки C уголъ между плоскостями P_1P_1' и P_2P_2' (VII) равенъ углу $(n_1 n_2)$, осевая линия совпадаетъ съ кратчайшимъ разстояніемъ между нормальми, положеніе-же граничной плоскости остается неопредѣленнымъ, такъ какъ обѣ величины (22) равны безконечности. Но въ данномъ случаѣ легко видѣть непосредственно, что по направленію C возможно поступательное перемѣщеніе ($p = \infty$) въ ту и другую сторону; съ другой стороны, простое вращеніе ($p = 0$) около осей, параллельныхъ осевой линіи, возможно, смотря по тому, въ которомъ изъ четырехъ угловъ, образуемыхъ плоскостями нормалей, винтовая ось находится. Вращеніе $(+\omega)$ возможно около прямыхъ, лежащихъ въ углѣ (P_1P_2') , вращеніе $(-\omega)$ —около прямыхъ угла (P_2P_1') . Такъ какъ вдоль всѣхъ этихъ прямыхъ возможно поступательное перемѣщеніе въ обѣ стороны, то очевидно возможно и винтовое перемѣщеніе со всякою положительною и отрицательною величиною параметра, но съ однимъ опредѣленнымъ, тѣмъ или другимъ направленіемъ угловой скорости. Только около осевой линіи угловая скорость можетъ имѣть оба направленія. Около прямыхъ, лежащихъ въ двухъ остальныхъ углахъ, никакое винтовое перемѣщеніе съ конечнымъ параметромъ не возможно.

Все сказанное относительно точки C относится и къ противоположной ей точкѣ D . Идя отъ точки C по дугѣ C_1AD , будемъ имѣть постоянно $tg \varphi_1 = \infty$; тогда, согласно общему правилу § 9, граничная плоскость будетъ оставаться совпадающею съ плоскостью P_1P_1' . Точно также, если идти по дугѣ DA_2C , то граничная плоскость будетъ совпадать съ плоскостью P_2P_2' .

Если идти по окружности большого круга $CADBC$ (VI) т. е. разсматривать угловые скорости, параллельныя одной и той же плоскости, то осевая линія будетъ описывать поверхность линейчатого параболоида. При переходѣ отъ точки O къ точкѣ A (VI) уголъ между прямыми $(+n_1)$ и $(-n_2)$ на чертежѣ (VIII), уменьшаясь, обратится въ нуль, а точка E уйдетъ

въ безконечность, прямая-же S_{12} , слѣдь граничной плоскости, слѣдается параллельною вышеуказаннымъ прямымъ. При переходѣ отъ A къ D уголъ между этими прямыми начнетъ возрастать, и т. д. Замѣтимъ еще,—и это будетъ имѣть приложеніе въ дальнѣйшемъ, — что если уголъ между плоскостями круговъ $CADBC$ и CA_1DB_1C весьма малый, то численное значеніе $tg \varphi_1$ остается весьма большимъ сравнительно съ численнымъ значеніемъ $tg \varphi_2$; поэтому S_{12} (VIII) будетъ образовывать весьма малый уголъ съ прямою $(+n_1)$. Точно такъ-же, уголъ между S_{12} и $(-n_2)$ будетъ весьма малъ, если плоскость $CADBC$ будетъ съ плоскостью CA_2DB_2C образовывать весьма малый уголъ. Итакъ, въ разсматриваемыхъ сопряженныхъ областяхъ (15) и (16) всегда можно найти такія точки, что граничная плоскость будетъ составлять какой-угодно малый уголъ съ плоскостью P_1P_1' или P_2P_2' . Численная зависимость этого угла отъ положенія точки на шарѣ параметровъ можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ. Если положеніе точки на шарѣ параметровъ опредѣлить долготою α и широтою ε , принявъ кругъ CA_1DB_1C за экваторъ, а точку C за начало долготы, если черезъ ν_{12} означить уголъ между нормали (n_1, n_2) , черезъ β уголъ между плоскостями P_1P_1' и P_2P_2' , равный углу $(+n_1, -n_2)$ чертежа VIII, и наконецъ черезъ s_1 уголъ между плоскостью P_1P_1' и граничною плоскостью, равный углу $(+n_1, S_{12})$ чертежа VIII, то получимъ:

$$\cotg s_1 = \cotg \beta + \frac{\cotg \varepsilon}{\cos \alpha \sin \nu_{12}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \nu_{12}}{\sin^2 \beta}}, \quad (29)$$

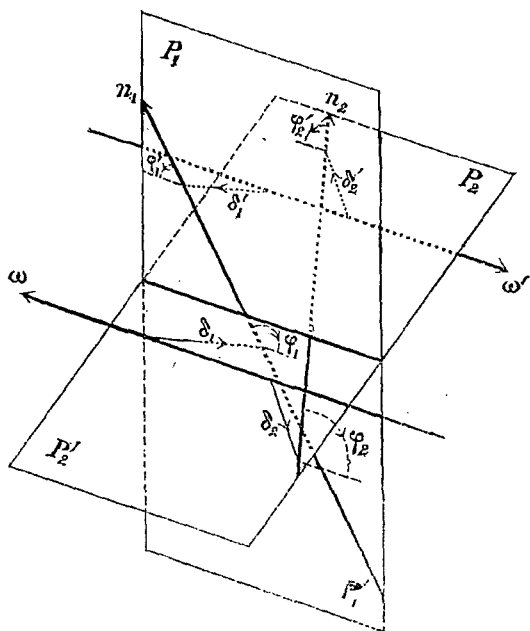
гдѣ уголъ β опредѣляется изъ уравненія:

$$\cos \nu_{12} \sin \beta - \cos \varepsilon \cos \alpha \sin \nu_{12} \cos \beta + \sin \varepsilon \sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \nu_{12}} = 0. \quad (30)$$

12. Возможныя винтовыя оси съ параметромъ, равнымъ нулю или безконечности. Чтобы отыскать оси, около которыхъ возможно простое вращеніе, обратимся опять къ неравенствамъ § 6. Въ случаѣ неравенствъ (14) и соответствующихъ имъ неравенствъ (18) для существованія простаго вращенія необходимо, чтобы бóльшая изъ величинъ (22)

не превосходила нуля, т. е. чтобы ни одинъ изъ угловъ φ_1 и φ_2 не былъ острымъ. Зададимъ какое нибудь направление угловой скорости, удовлетворяющее неравенствамъ (14), и черезъ нормали n_1 и n_2 проведемъ плоскости P_1P_1' и P_2P_2' , этому направлению параллельными (X). Условію, чтобы φ_1 и φ_2 были

X



тупыми углами, удовлетворяютъ только тѣ прямыя заданнаго направленія, которыя лежатъ въ углѣ (P_1P_2') ; около такихъ прямыхъ только и будетъ возможно простое вращеніе, удовлетворяющее условіямъ (18). Прямыя заданнаго направленія, лежащія на самыхъ граняхъ угла (P_1P_2') принадлежатъ тоже къ возможнымъ осямъ вращенія, удовлетворяющимъ у-

словіямъ (14), такъ какъ для нихъ одна изъ величинъ (22) равна нулю, а другая—отрицательная.

Въ случаѣ (17) для того, чтобы было возможно простое вращеніе, необходимо, чтобы меньшая изъ величинъ (22) была положительная, т. е. чтобы оба угла φ_1 и φ_2 не превосходили прямого. Это требованіе выполняется лишь для тѣхъ осей даннаго направленія, которыя лежатъ въ углѣ $(P_1'P_2)$; онѣ могутъ находиться и на самыхъ граняхъ этого угла, такъ какъ тогда одна изъ величинъ (22) равна нулю, а другая—положительная.

Наконецъ въ случаяхъ (15) и (16), когда параметръ возможной винтовой скорости заключается между величинами (22), для возможности простого вращенія необходимо; чтобы одна

изъ величинъ была не больше нуля, а другая — не меньше нуля. Это выполняется опять для прямыхъ, лежащихъ въ углахъ $(P_1'P_2)$ и (P_1P_2') (VII); причемъ для прямыхъ въ первомъ изъ этихъ угловъ угловая скорость будетъ съ нормалью n_1 составлять тупой уголъ, а для прямыхъ другого угла будетъ уголъ $(n_2\omega)$ тупой. Такимъ образомъ для всѣхъ разобранныхъ случаевъ можно вывести слѣдующее общее правило:

Каково-бы ни было заданное направленіе оси, простое вращеніе около нея будетъ возможно, если она будетъ лежать въ одномъ изъ двухъ вертикальныхъ двугранныхъ угловъ, образуемыхъ плоскостями нормалей; грани этихъ угловъ опредѣляются тѣмъ, что одна изъ нихъ содержитъ положительное направленіе одной изъ нормалей, а другая — отрицательное направленіе другой нормали. Около прямыхъ, лежащихъ въ одномъ изъ двухъ указанныхъ угловъ, возможно вращеніе въ одну сторону, а около прямыхъ другого угла — въ сторону противоположную.

Для опредѣленія того, которому изъ двухъ угловъ какое направленіе угловой скорости соответствуетъ, замѣтимъ, что, глядя по направленію возможной угловой скорости, мы должны видѣть обѣ нормали съ правой стороны.

Что касается до винтовыхъ скоростей съ параметромъ, равнымъ бесконечности, т. е. поступательныхъ, то нетрудно видѣть изъ разбора случаевъ (14), (15), (16) и (17), что эти скорости возможны только по направленіямъ, образующимъ съ обѣими положительными нормальными углами, не превосходящіе прямого. Это легко впрочемъ видѣть и непосредственно, принявъ во вниманіе, что плоскости A_1B_1 и A_2B_2 (VI) параллельны касательнымъ плоскостямъ въ точкахъ касанія поверхности тѣла къ двумъ даннымъ неподвижнымъ поверхностямъ.

13. Возможныя винтовыя оси при параллельныхъ нормаляхъ. Здѣсь нужно различать два случая: когда нормали направлены въ одну сторону, и когда онѣ противоположны. Въ первомъ случаѣ области двугранныхъ угловъ A_2CDB_1 и A_1CDB_2 (VI) опредѣляются полушаріями, а остальные двѣ

области обращаются въ полукружности большого круга; во второмъ-же случаѣ будетъ обратное.

Останавливаясь сначала на *первомъ случаѣ*, находимъ по общему правилу, что съ угловою скоростью, образующею съ обѣими нормальми острый уголъ [случай (14)], около всякой оси возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, не меньшимъ бѣльшей ихъ величинъ (22); съ угловою скоростью, образующею тупой уголъ съ обѣими нормальми [случай (17)], возможно винтовое перемѣщеніе тоже около всякой оси, но съ параметромъ, не превосходящимъ меньшей изъ величинъ (22). Такимъ образомъ, винтовое перемѣщеніе возможно около всякой прямой пространства, съ условіемъ, чтобы параметръ винтовой скорости находился внѣ предѣловъ, опредѣляемыхъ величинами (22).

Въ частности, простое вращеніе возможно около тѣхъ осей даннаго направленія, для которыхъ бѣльшая изъ величинъ (22) отрицательная или меньшая изъ нихъ положительная, т. е. для которыхъ обѣ онѣ одинаковаго знака. Это условіе выполняется для всѣхъ осей, которыя не проходятъ въ промежуткѣ между нормальми. Около осей, для которыхъ обѣ величины (22) отрицательныя, возможно простое вращеніе въ одну сторону, а около параллельныхъ имъ осей, для которыхъ величины (22) положительныя, возможно вращеніе лишь въ сторону противоположную.

Что касается до случаевъ (15) и (16), то имъ теперь соотвѣтствуютъ только угловыя скорости, перпендикулярныя къ обѣимъ нормальмъ; причемъ величины (22) обращаются въ безконечность. Примѣненіе общаго приѣма поэтому теперь неудобно, но легко этотъ случай разобрать непосредственно. Очевидно, что поступательное перемѣщеніе возможно по всякому направленію, перпендикулярному къ обѣимъ нормальмъ; простое-же вращеніе возможно около тѣхъ осей, которыя, имѣя произвольное, перпендикулярное къ нормальмъ направленіе, не проходятъ въ промежуткѣ между обѣими нормальми. Очевидно, что около этихъ послѣднихъ осей возможно винтовое перемѣщеніе со всякою величиною параметра. Угловая

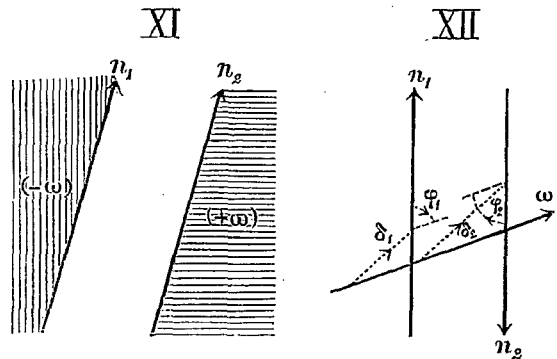
скорость можетъ впрочемъ имѣть при этомъ только одно изъ двухъ взаимно противоположныхъ направленій, смотря по тому, съ которой стороны отъ обѣихъ нормалей находится винтовая ось (XI). Около-же осей, проходящихъ между нормальми, возможно лишь винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, равнымъ безконечности, т. е. поступательное, притомъ въ ту и въ другую сторону. Наконецъ еще замѣтимъ, что около осей, которыя параллельны плоскости, содержащей нормали, но могутъ образовать съ ними какой-угодно уголъ, возможны тѣ-же винтовые скоро-

сти, какъ если-бы одной изъ нормалей совсѣмъ не было, такъ какъ оба неравенства для p тогда совпадаютъ. Въ частности, если винтовая ось пересекается обѣ нормали подъ какимъ-нибудь

угломъ, то около нея возможна винтовая скорость со всякимъ параметромъ; причемъ угловая скорость можетъ имѣть на оси оба направленія, а поступательная—только одно.

Переходя ко второму случаю, когда n_1 и n_2 противоположно направлены, замѣтимъ, что если ω не перпендикулярна къ нормальмъ, она будетъ всегда съ одною изъ нихъ составлять острый уголъ, а съ другою—тупой; поэтому параметръ всякой винтовой скорости долженъ заключаться между величинами (22).

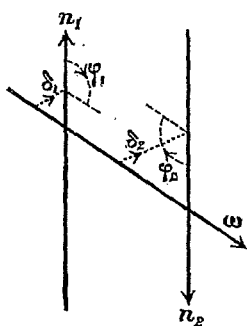
Если винтовая ось лежитъ по одну сторону отъ обѣихъ нормалей, то $\varphi_1 = \varphi_2$. Пусть будутъ эти углы острые и пусть ω образуетъ острый уголъ съ n_1 (XII); тогда около этой оси возможна винтовая скорость съ параметромъ, удовлетворяющимъ неравенству:



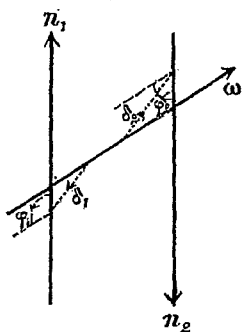
$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \leq p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (31)$$

Чтобы это неравенство было возможно, необходимо, чтобы было $\delta_1 \leq \delta_2$. Легко такимъ образомъ видѣть, что вообще около оси, проходящей по одну сторону отъ обѣихъ нормалей, возможна винтовая скорость съ параметромъ, заключеннымъ между предѣлами (22);

XIII



XIV



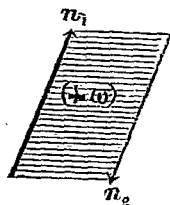
причемъ, если φ_1 и φ_2 *острые*, то угловая скорость должна образовать съ тою изъ нормалей, которая къ винтовой оси ближе, *острый* уголъ; если-же φ_1 и φ_2 *тупые* (XIII), то угловая скорость

должна съ ближайшею нормалью образовать *тупой* уголъ. Сюда-же относятся и оси, пересекающія одну изъ нормалей.

Если винтовая ось проходитъ между нормальми, то углы φ_1 и φ_2 дополняютъ другъ-друга до двухъ прямыхъ; поэтому одна изъ величинъ (22) положительная, а другая — отрицательная. Чтобы были выполнены неравенства (31) или имъ обратныя, необходимо, чтобы угловая скорость образовала острый уголъ съ тою нормалью, для которой уголъ φ тупой (XIV).

Относительно винтовыхъ осей, перпендикулярныхъ къ обѣимъ нормальмъ, опять непосредственно легко видѣть, что поступательное перемѣщеніе возможно по всякому такому на-

XV



правленію; вращеніе-же возможно теперь только около тѣхъ осей, которыя проходятъ *между* нормальми; притомъ угловая скорость можетъ имѣть только одно изъ двухъ направленій (XV).

Но, такъ какъ поступательное перемѣщеніе возможно по обоимъ направленіямъ данной прямой, то параметръ винтовой скорости около вышеуказанныхъ осей можетъ имѣть всякую величину, положительную или отри-

цательную. Около-же осей, не проходящихъ между нормальми,

никакое винтовое перемѣщеніе съ конечнымъ параметромъ не возможно.

Около осей, параллельныхъ плоскости, содержащей обѣ противоположно направленныхъ нормали, возможно винтовое перемѣщеніе съ опредѣленною величиною параметра, такъ какъ величины (22) дѣлаются равными, а знаки неравенствъ для p противоположны. Въ частности, около осей, пересѣкающихся обѣ нормали, остается возможнымъ только простое вращеніе, если эти оси не перпендикулярны къ нормалямъ; въ случаѣ же ихъ перпендикулярности возможна всякая винтовая скорость.

Особенное значеніе по вопросу о наибольшемъ стѣсненіи движенія твердаго тѣла при двухъ опорныхъ поверхностяхъ имѣетъ тотъ случай, когда двѣ прямо противоположныхъ нормали лежатъ на одной прямой. По прежнему винтовое перемѣщеніе остается возможнымъ около всякой оси, но предѣлы для параметра сливаются, такъ-что онъ на всякой оси принимаетъ одно опредѣленное значеніе. Въ частности, для осей, пересѣкающихся нормали, онъ имѣетъ значеніе, равное нулю; и только, если ось кромѣ того и перпендикулярна къ нормалямъ, параметръ можетъ имѣть всякое значеніе.

Три опорныхъ поверхности.

14. Условія для возможныхъ винтовыхъ скоростей. Аналогично случаю двухъ опорныхъ поверхностей, всѣ возможные здѣсь по отношенію къ направленію угловой скорости случаи, число которыхъ теперь восемь, можно раздѣлить на четыре слѣдующихъ группы:

1-ая группа: угловая скорость образуетъ со всѣми тремя нормалами, n_1, n_2, n_3 къ опорнымъ поверхностямъ въ точкахъ ихъ касанія къ твердому тѣлу углы, не превосходящіе прямого; параметръ винтовой скорости будетъ при этомъ удовлетворять неравенствамъ:

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3; \quad (32)$$

2-ая группа: уголъ угловой скорости съ двумя нормальми не превосходитъ прямого, а съ третьею нормалью — не меньше прямого; параметръ удовлетворяетъ тогда одной изъ слѣдующихъ системъ неравенствъ:

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3; \quad (33)$$

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3; \quad (34)$$

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3. \quad (35)$$

3-я группа: угловая скорость образуетъ съ одною изъ нормалей уголъ, не превосходящій прямого, а съ двумя остальными — уголъ, не меньшій прямого; въ этомъ случаѣ для параметра имѣемъ одну изъ слѣдующихъ трехъ системъ неравенствъ:

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3; \quad (36)$$

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3; \quad (37)$$

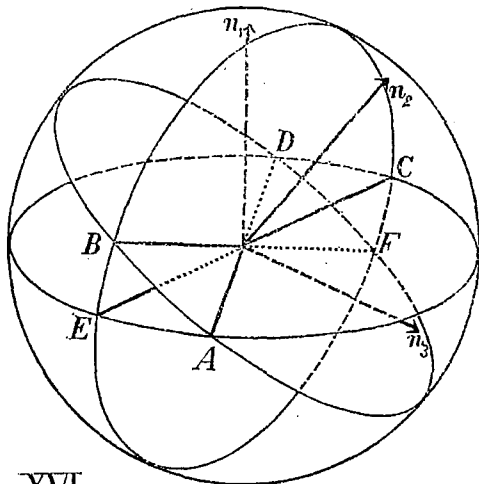
$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3. \quad (38)$$

4-ая группа: угловая скорость со всѣми тремя нормальми образуетъ углы, не меньшіе прямого; такъ-что:

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3. \quad (39)$$

Этимъ восьми случаямъ соотвѣтствуютъ на шарѣ параметровъ восемь областей, опредѣляемыхъ восемью сферическими треугольниками, которые получаются отъ пересѣченія шара тремя плоскостями, проходящими черезъ его центръ и перпендикулярными къ тремъ нормальмъ n_1, n_2, n_3 . На чертежѣ XVI восьми случаямъ (32) ... (39) соотвѣтствуютъ треугольники: ABC (32), BDC (33), AEB (34), AFC (35), AEF (36), DCF (37), EBD (38), EDF (39). Легко при этомъ видѣть, что сопряженными областями (§ 6) будутъ: ABC и EDF , BDC и AEF , AEB и DCF , AFC и EBD . Нужно замѣтить, что каждая пара сопряженныхъ областей непремѣнно бу-

деть существовать, хотя и может обратиться въ дугу круга или въ точку. Такъ напр., если нормали n_1 и n_2 противоположно направлены, то области ABC и EDF обращаются въ полуокружности, плоскость которыхъ къ этимъ нормальмъ перпендикулярна; если-же всѣ три нормали параллельны одной плоскости и притомъ направленіе одной изъ нихъ образуетъ тупые углы съ двумя остальными, то области ABC и AEF обращаются въ точки, и т. д.



XVI

15. Винтовые скорости, соответствующія областямъ 1-й и 4-й группы. Всякое винтовое перемѣщеніе, при которомъ угловая скорость имѣетъ направленіе, опредѣляемое областью ABC , возможно, если параметръ винтовой скорости не меньше бѣльшей изъ величинъ

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3. \quad (40)$$

Около той-же оси возможно винтовое перемѣщеніе съ угловою скоростью, направленіе которой опредѣляется областью EFD , сопряженною съ первой, если параметръ не превосходить меньшей изъ величинъ (40). Замѣтимъ, что величины (40) могутъ имѣть при этомъ какіе угодно знаки, которые, при данномъ направленіи оси, будутъ зависѣть отъ ея положенія относительно трехъ нормалей. Поэтому, если взять пучекъ параллельныхъ между собою винтовыхъ осей, направленіе которыхъ соответствуетъ сопряженнымъ областямъ ABC и EFD , то около каждой изъ нихъ будетъ возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, величина котораго находится *внѣ* нѣкоторыхъ предѣловъ p' и p'' , для каждой оси пучка различныхъ,

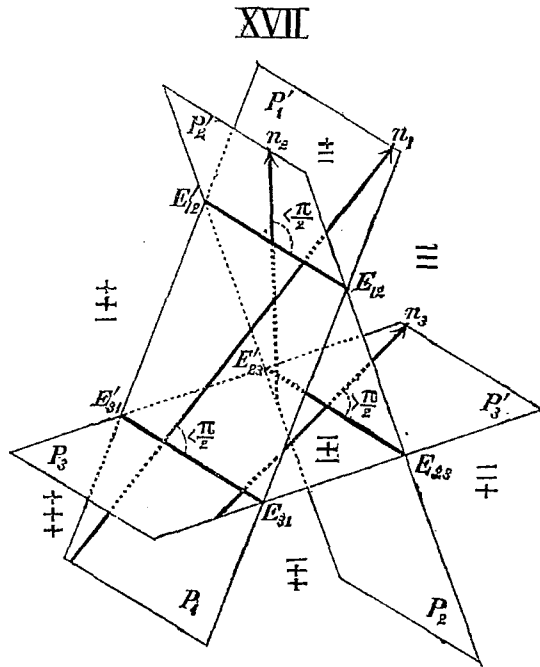
и съ угловою скоростью, которая можетъ имѣть то или другое направленіе на оси, смотря по тому, съ которой стороны предѣловъ p' и p'' находится величина параметра винтовой скорости.

Принимая во вниманіе сказанное въ концѣ § 14, мы видимъ, что *въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей, каково-бы ни было расположеніе нормалей n_1, n_2, n_3 , всегда найдутся такія направленія, что около всѣхъ прямыхъ, имъ принадлежащихъ, будетъ возможно винтовое перемѣщеніе съ тѣмъ и съ другими направленіемъ угловой скорости.* Область этихъ направленій на шарѣ параметровъ можетъ впрочемъ, какъ уже было раньше замѣчено, обратиться въ точку.

16. Винтовые скорости, соответствующія областямъ 2-й и 3-й группы. Соответствующія этимъ группамъ неравенства (33) ... (38) показываютъ, что теперь параметръ возможной винтовой скорости заключенъ *между* нѣкоторыми предѣлами, конечно опять различными для различныхъ винтовыхъ осей разсматриваемой области. Обратимся сначала къ области BDC , которой соответствуютъ неравенства (33). Чтобы винтовая ось при этомъ была дѣйствительно возможна, эти неравенства должны быть совмѣстны. Разберемъ подробнѣе обстоятельства, при которыхъ это требованіе выполняется. Для этого зададимъ какое-нибудь направленіе угловой скорости, соответствующее области BDC , и черезъ нормали n_1, n_2, n_3 проведемъ плоскости P_1P_1', P_2P_2' и P_3P_3' , параллельныя этому направленію. Эти плоскости пересѣкутся по осевымъ линіямъ E_1E_1', E_2E_2' и E_3E_3' , тому-же направленію параллельнымъ и разграничатъ все пространство на 7 областей, которымъ будутъ для винтовыхъ осей, лежащихъ въ этихъ областяхъ, соответствовать 7 различныхъ сочетаній знаковъ для величинъ (40) изъ числа 8 сочетаній вообще возможныхъ. На чертежѣ XVII сдѣлано перспективное изображеніе этихъ областей, а на чертежѣ XVIII — изображеніе по правилу, указанному въ § 9 и примененному впервые на чертежѣ VIII. Въ каждой изъ 7 областей поставлены по порядку знаки ве-

личинъ (40), опредѣленные на основаніи введеннаго въ § 4 правила для отсчитыванія угла φ .

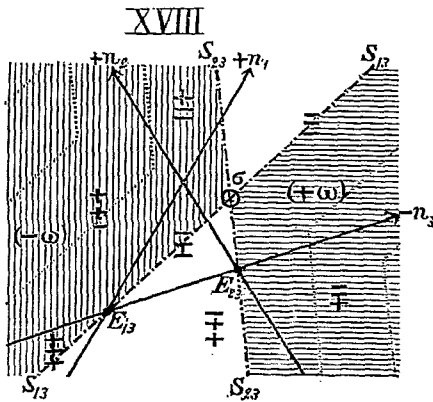
Въ областяхъ $(++-)$, $(+--)$ и $(-+-)$ неравенства (33) не совмѣстны ни при какомъ положеніи прямой заданнаго направленія; въ области-же $(---)$ для всѣхъ прямыхъ эти неравенства удовлетворяются. Въ остальныхъ областяхъ неравенства (33) выполняются не для всѣхъ прямыхъ; а именно, въ области $(---)$ возможная винтовая ось должна удовлетворять условію, чтобы $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ были численно больше величины $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$. Это требованіе будетъ выполнено для прямыхъ, лежащихъ по одну сторону *граничныхъ плоскостей* (§ 9) S_{13} и S_{23} , которыя на чертежѣ XVIII изображены прямыми, проведенными черезъ точки E_{13} и E_{23} , представляющія слѣды прямыхъ, по которымъ плоскость P_3P_3' пересѣкается съ плоскостями P_1P_1' и P_2P_2' . Эти граничныя плоскости, какъ это подробнѣе выяснено въ § 9, содержатъ прямыя даннаго направленія, для которыхъ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ или $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$. Область, заглушеванная горизонтальными штрихами, содержитъ возможные винтовыя оси, удовлетворяющія неравенствамъ (33). Легко видѣть, что эта область всегда будетъ заключать всю отмѣченную уже выше область $(---+)$ и часть области $(-+++)$. Наконецъ область $(+++)$,



и часть области $(-+++)$. Наконецъ область $(+++)$,

хотя вообще въ ней и можно было-бы удовлетворить неравенствамъ (33), отпадаетъ въ данномъ, представленномъ на чертежѣ XVIII случай.

Если обратиться къ сферической области AEF , сопряженной съ областью BDC , и слѣдовательно отыскивать возможные винтовые оси, удовлетворяющія неравенствамъ (36), то разсужденіями, подобными предыдущимъ, легко придти къ слѣдующему результату: возможные винтовые оси будутъ заключены въ двугранномъ углѣ, образуемомъ граничными плоскостями S_{13} и S_{23} и вертикальномъ относительно того угла, въ которомъ находились винтовые оси, удовлетворяющія неравенствамъ (33). На чертежѣ XVIII область такихъ винтовыхъ осей затупевана вертикальными штрихами.



Легко видѣть, что подобныя-же результаты получатся для прямыхъ, принадлежащихъ сопряженнымъ областямъ AEB и DCF или AFC и EBD , съ тою только разницею, что тамъ будутъ играть роль граничныя плоскости S_{23} и S_{21} или S_{31} и S_{32} .

Соединяя все вышеизложенное, можно сказать: *Въ лучахъ параллельныхъ между собою прямыхъ, общее направленіе которыхъ образуетъ съ двумя нормальми къ опорнымъ поверхностямъ острый, а съ третьею нормалью тупой уголъ, тѣ прямыя могутъ служить возможными винтовыми осями, которыя заключены въ одномъ изъ двухъ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ граничными плоскостями, проведенными черезъ осевыя линіи, по которымъ плоскости, содержащія первыя двѣ нормали и параллельныя данному направленію, пересекаются съ такою-же плоскостью, содержащею третью нормаль.* На прямыхъ одного изъ этихъ угловъ угловая скорость

можетъ имѣть одно направленіе, а на прямыхъ другого угла — направленіе противоположное.

Въ двухъ другихъ двугранныхъ углахъ, образуемыхъ тѣми-же граничными плоскостями, смежныхъ съ вышеуказанными, лежатъ прямые того-же даннаго направленія, около которыхъ никакія винтовые скорости не возможны.

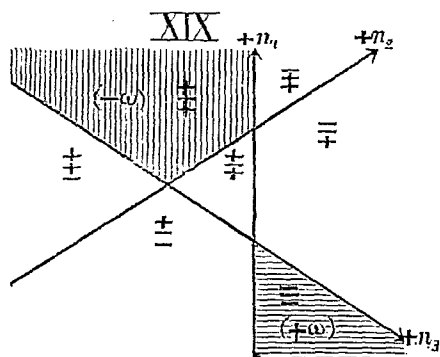
Принимая во вниманіе результаты, относящіеся къ случаю двухъ опорныхъ поверхностей, находимъ теперь слѣдующее положеніе: *Для того, чтобы существовали прямые, около которыхъ никакое винтовое перемѣщеніе не возможно, необходимо, чтобы твердое тѣло опиралось по крайней мѣрѣ на три неподвижныхъ поверхности.* Дѣйствительно, какъ мы видѣли въ §§ 6—9, въ случаѣ двухъ опорныхъ поверхностей около всякой прямой возможно винтовое перемѣщеніе, лишь-бы параметръ его удовлетворялъ нѣкоторымъ условіямъ.

Направленіе прямыхъ S_{13} и S_{23} (XVIII), и вмѣстѣ съ тѣмъ положеніе точки ихъ пересѣченія σ , зависятъ отъ того, какую величину, въ возможныхъ для нихъ предѣлахъ, имѣютъ углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Чертежъ XVI показываетъ, что каждый изъ этихъ угловъ въ каждой изъ областей можетъ сдѣлаться какъ угодно близокъ къ прямому, такъ-что численно отношенія $tg \varphi_1$ и $tg \varphi_2$ къ $tg \varphi_3$ могутъ, въ зависимости отъ направленія винтовой оси, принять какія-угодно значенія отъ 0 до ∞ . Поэтому (§ 11) прямая S_{13} можетъ принимать всякое направленіе внутри угла $(n_1 E_{31} n_3)$ (XVIII), а прямая S_{23} — внутри угла $(n_2 E_{23} n_3)$. Отсюда видно, что точка ихъ пересѣченія σ можетъ занять всякое положеніе въ области (— — —) или, перейдя черезъ безконечность, въ области (+ + +). Въ частности прямые S_{13} и S_{23} могутъ сдѣлаться параллельными; тогда область невозможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія будетъ ограничена двумя параллельными плоскостями.

Предѣлы, въ которыхъ заключается величина параметра для различныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія, не одинаковы. Принимая во вниманіе сказанное въ концѣ § 9, можно видѣть, что разность между предѣлами будетъ одинакова для тѣхъ винтовыхъ осей даннаго направленія, которыя, нахо-

дятся въ одномъ изъ двухъ возможныхъ винтовыхъ осей, лежать въ плоскости, параллельной одной изъ граничныхъ плоскостей, и по одну сторону отъ соответственной плоскости, параллельной другой граничной плоскости. На чертежѣ XVIII слѣды этихъ плоскостей равныхъ разностей предѣловъ изображены точечнымъ пунктиромъ.

17. **Возможныя винтовыя оси съ параметромъ, равнымъ нулю или безконечности.** Чтобы отыскать оси, около которыхъ, въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей, возможно простое вращение, обратимся опять къ неравенствамъ § 14. Чтобы возможно было простое вращение съ угловою скоростью, направление которой принадлежитъ области ABC (32), нужно, чтобы ось вращения имѣла такое положеніе относительно трехъ нормалей, чтобы бóльшая изъ величинъ (40) не превосходила нуля. Для каждаго изъ указанныхъ направлений будетъ существовать ограниченный пучекъ параллельныхъ осей, удовлетворяющихъ этому требованію. Если сдѣлать построеніе на плоскости по правилу, которое примѣнялось на



чертежѣ XVIII, но для направления, принадлежащаго сопряженнымъ областямъ ABC и EDF , то вышеуказанный пучекъ будетъ опредѣляться областью $(- - -)$ (XIX), а пучекъ осей съ обратнымъ направлениемъ угловою скорости

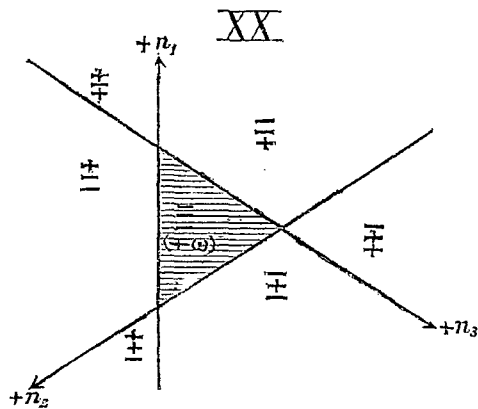
$[EDF$ (39)] — областью $(+ + +)$.

Чтобы было возможно простое вращение съ угловою скоростью, направление которой опредѣляется на сферѣ параметровъ областью BDC (33), нужно, чтобы бóльшая изъ величинъ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ была не больше нуля, а $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ не меньше нуля. На чертежѣ XVIII, который соответствуетъ сопряженнымъ областямъ BDC и AEF , это требованіе выполняется всѣми прямыми, принадлежащими области $(- - +)$: око-

до этихъ прямыхъ возможно простое вращеніе съ угловою скоростью, образующею острые углы съ нормальми n_1 и n_2 и тупой уголъ съ третьею нормалью. Точно такъ-же легко видѣть, что въ области (+ + -) лежатъ прямыя, около которыхъ возможно вращеніе съ угловою скоростью, прямо противоположною предыдущей.

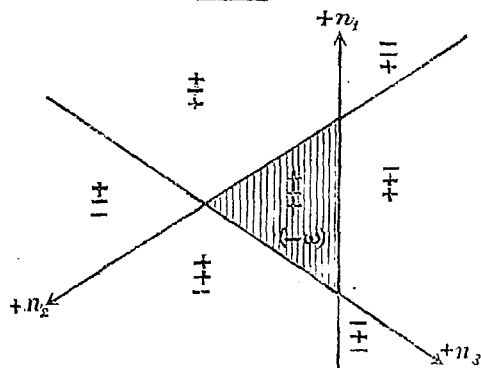
Подобныя-же результаты получаются и для остальныхъ случаевъ 2-й и 3-й группъ.

Нужно впрочемъ замѣтить, — и это весьма существенно въ вопросѣ о возможно большемъ стѣсненіи въ движеніи твердаго тѣла, — что возможно такое относительное расположеніе нормалей, при которомъ область прямыхъ даннаго направленія, могущихъ служить осями простого вращенія, будетъ одна а не двѣ, и притомъ замѣнутая, а направленіе угловою скорости будетъ возможно только одно изъ двухъ прямо противоположныхъ. Чтобы этого достигнуть, нужно только принять во вниманіе, что изъ 8 сочетаній трехъ знаковъ на перпендикулярной къ осямъ плоскости одно всегда отсутствуетъ, и расположить нормали такимъ образомъ, чтобы 1) отсутствовало сочетаніе знаковъ, соотвѣтствующее одной изъ двухъ возможныхъ областей вращенія, и 2) остающаяся область вращенія была замѣнутая. Такіе случаи представлены на чертежахъ XX, XXI, XXII и XXIII, которые получены изъ чертежей XIX и XVIII переносомъ прямыхъ n_1, n_2, n_3 параллельно самимъ себѣ или измѣненіемъ ихъ направленій на противоположныя. Чертежи XX и XXI, полученные изъ чертежа XIX, соотвѣтствуютъ угловымъ скоростямъ 1-й и 4-й группъ, а чертежи XXII и XXIII, полученные изъ чертежа XVIII, угловымъ скоростямъ 2-й и 3-й группъ.

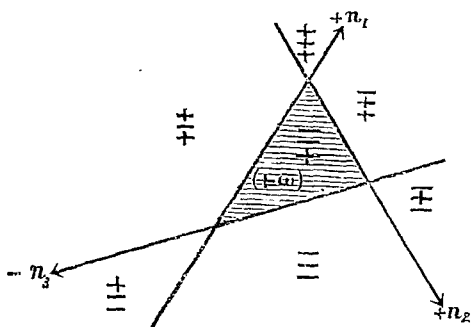


Соединяя всё случаи вмѣстѣ, можно сказать: Если, въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей, три плоскости, проходящія черезъ нормали и параллельныя данному направлению, пересѣкутъ плоскостью къ нимъ перпендикулярною, то области осей даннаго направления, около которыхъ возможно простое вращеніе, изобразятся на этой плоскости такъ-же, какъ области центровъ возможныхъ вращеній при движеніи плоской фигуры въ ея плоскости въ случаѣ трехъ опорныхъ кривыхъ *).

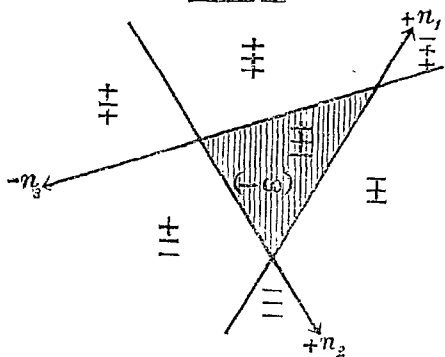
XXI



XXII



XXIII



и параллельныя данному направлению, пересѣкутъ плоскостью къ нимъ перпендикулярною, то области осей даннаго направления, около которыхъ возможно простое вращеніе, изобразятся на этой плоскости такъ-же, какъ области центровъ возможныхъ вращеній при движеніи плоской фигуры въ ея плоскости въ случаѣ трехъ опорныхъ кривыхъ *).

Если въ случаяхъ, представленныхъ на чертежахъ XX, XXI, XXII и XXIII, прямыя n_1 , n_2 , n_3 пересѣкаются въ одной точкѣ, то изъ всѣхъ прямыхъ даннаго направления только около прямой, проходящей черезъ эту точку и перпендикулярной къ плоскости чертежа, и будетъ возможно простое вращеніе, и притомъ только въ одну сторону. Направленій, обладающихъ

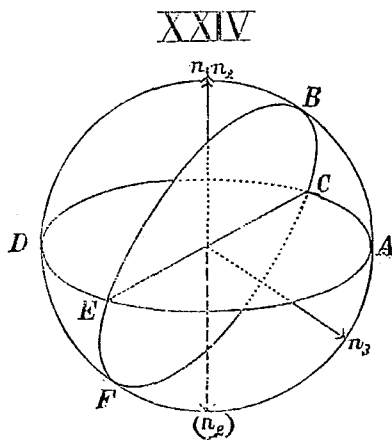
*) Для сравненія см. *Reuleaux*, Theoretische Kinematik, 1875 г. стр. 109—112.

этимъ свойствомъ, безчисленное множество; очевидно, что онѣ принадлежатъ системѣ производящихъ одного рода того линейчатого гиперboloида, который опредѣляется всѣми прямыми, пересѣкающими нормали къ тремъ опорнымъ поверхностямъ. Нужно впрочемъ замѣтить, что не вся система этихъ производящихъ обладаетъ такимъ свойствомъ. Такъ напр. въ случаяхъ, изображенныхъ на чертежахъ XVIII и XIX, если прямыя n_1 , n_2 , n_3 пересѣкнутся въ одной точкѣ, области возможныхъ простыхъ вращеній останутся распространенными въ безконечность.

Относительно поступательныхъ перемѣщеній ($p = \infty$) легко замѣтить слѣдующее: онѣ возможны только по такимъ направленіямъ, которыя со всѣми тремя нормальми образуютъ углы, не превосходящіе прямого. Эти направленія опредѣляются областью ABC (XVI). Если эта область обращается въ точку, то остается возможнымъ поступательное перемѣщеніе только по одному направленію.

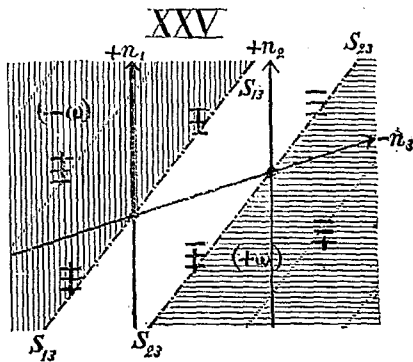
18. Возможныя винтовые оси для случая, когда двѣ изъ трехъ нормалей между собою параллельны. Пусть будутъ n_1 и n_2 параллельны. Если онѣ *въ одну сторону направлены*, то области ABC , BDF , AEF и EDF (XVI) обращаются въ сферическіе двухсторонники, ограниченные дугами большихъ круговъ; остальные-же четыре области попарно сливаются и обращаются лишь въ границы первыхъ четырехъ областей.

Легко видѣть, что около всякой оси, направленіе которой опредѣляется сопряженными областями $EBCA$ и $EDCF$ (XXIV), возможно, какъ и въ общемъ случаѣ, винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, величина котораго находится выѣ предѣловъ



между наименьшею и наибольшею изъ величинъ (40).

Областямъ $EBCD$ и $EFCA$ соответствуютъ неравенства (33) и (36). Изъ семи областей, представленныхъ на чертежѣ XVII или XVIII, остаются шесть (XXV). Исчезаетъ область



(+ - -); но при иномъ расположеніи нормалей могла-бы исчезнуть и какая-либо другая область. Не повторяя разсужденій § 16 объ остающихся шести областяхъ, замѣтимъ только, что граничныя плоскости S_{13} и S_{23} становятся теперь параллельными; потому-что отношеніе $tg \varphi_1 : tg \varphi_3$ въ об-

ласти $(+ + +)$ равно $tg \varphi_2 : tg \varphi_3$ въ области $(- - -)$, ибо въ послѣдней области углы φ_2 и φ_3 дополняютъ до двухъ прямыхъ углы φ_1 и φ_3 въ первой области. Такимъ образомъ, винтовыми осями даннаго направленія, образующаго съ двумя параллельными нормальми острый уголъ, а съ третьею — тупой или обратно, могутъ служить тѣ прямыя, которыя лежатъ или по одну сторону граничной плоскости S_{13} , или по другую сторону параллельной ей граничной плоскости S_{23} . При этомъ въ одной изъ этихъ областей угловая скорость должна имѣть одно направленіе, а въ другой — направленіе противоположное. Въ первой изъ этихъ областей $(+ \omega)$ параметръ винтовой скорости долженъ заключаться между величинами $\delta_2 tg \varphi_2$ и $\delta_3 tg \varphi_3$, а во второй области — между $\delta_1 tg \varphi_1$ и $\delta_3 tg \varphi_3$. Геометрическія мѣста слѣдовъ осей, для которыхъ разность между предѣлами параметра одинакова, изображены на чертежѣ XXV точечнымъ пунктиромъ. Около прямыхъ даннаго направленія, лежащихъ между граничными плоскостями, никакое винтовое перемѣщеніе не возможно.

Наконецъ еще замѣтимъ, что простое вращеніе возможно около такихъ осей даннаго направленія, которыя лежатъ (XXV) въ областяхъ $(- - +)$ и $(+ + -)$; въ первой изъ нихъ,

соотвѣтственно неравенствамъ (33), возможно вращеніе въ одну сторону, а во второй, соотвѣтственно неравенствамъ (36), — въ сторону противоположную.

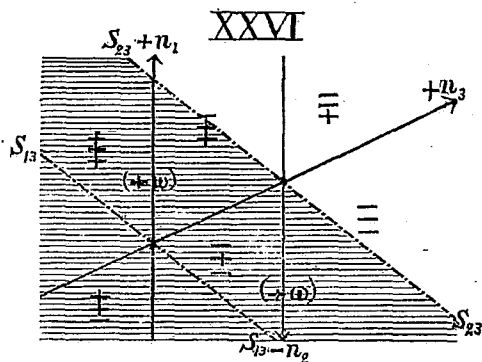
Поступательныя перемѣщенія возможны очевидно по направленіямъ, опредѣляемымъ на чертежѣ XXIV областью *ЕВСА*.

Предположимъ теперь, что *параллельныя нормали n_1 и n_2 направлены противоположно другъ-другу*. Въ этомъ случаѣ области *АЕВ*, *ЕВD*, *DCF* и *ACF* чертежа XVI обращаются въ сферическіе двухсторонники, ограниченные дугами большихъ круговъ; а остальные четыре области, сливаясь попарно, обращаются лишь въ границы первыхъ четырехъ областей. Для изображенія областей будемъ пользоваться прежнимъ чертежомъ XXIV, беря только то направленіе нормали n_2 , которое поставлено въ скобкахъ.

Сопряженные области *ЕВСА* и *EDCF* соотвѣтствуютъ теперь неравенствамъ (34) и (37), а остальная пара сопряженныхъ областей — неравенствамъ (35) и (38). Такимъ образомъ теперь не существуетъ такихъ областей для направлений винтовыхъ осей, для которыхъ параметръ возможной винтовой скорости находилсѣ-бы *внѣ* нѣкоторыхъ конечныхъ предѣловъ.

Зададимъ какое-нибудь направленіе винтовыхъ осей, соотвѣтствующее сопряженнымъ областямъ *ЕВСА* и *EDCF*.

Изъ семи областей общаго случая теперь опять остаются только шесть, отмѣченные на чертежѣ XXVI. Изъ двухъ граничныхъ плоскостей S_{13} и S_{23} сохраняетъ свое значеніе только послѣдняя, такъ какъ прямыя n_1 и n_2 сопровождаются



теперь одинаковыми знаками; граничная-же плоскость только тогда *раздѣляетъ* области возможныхъ и невозможныхъ винтовыхъ осей, когда слѣдъ ея проходитъ черезъ точку пересѣ-

ченія такихъ проекцій нормалей, при которыхъ стоятъ противоположные знаки. Плоскость S_{23} служитъ границею для области возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія. Въ самомъ дѣлѣ, въ области $(- - +)$ неравенства (34) совсѣмъ не выполняются; въ области $(- + +)$ первое и второе изъ этихъ неравенствъ всегда совмѣстны, а второе и третье совмѣстны по одну сторону граничной плоскости S_{23} . Въ областяхъ $(+ + +)$ и $(+ + -)$

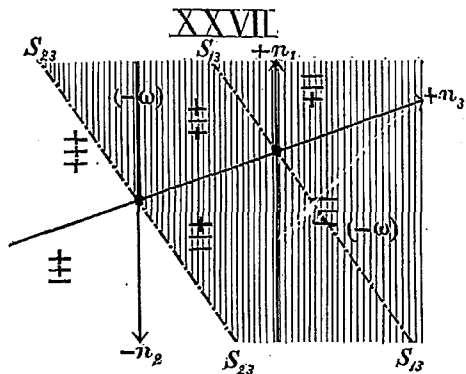
$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 < \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (41)$$

такъ какъ $\varphi_1 = \varphi_2$, а $\delta_1 < \delta_2$; поэтому здѣсь первое и второе изъ неравенствъ (34) всегда совмѣстны; второе и третье изъ нихъ въ области $(+ + +)$ совмѣстны по одну сторону граничной плоскости S_{23} , а въ области $(+ + -)$ совмѣстны вездѣ. Въ области $(- + -)$ неравенства (34) вездѣ совмѣстны, а въ области $(- - -)$ первыя два изъ этихъ неравенствъ совмѣстны вездѣ, такъ какъ изъ отрицательныхъ теперь величинъ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ первая численно больше второй; второе-же и третье изъ неравенствъ (34) совмѣстны опять по одну сторону плоскости S_{23} . Итакъ винтовая скорость съ положительною угловою скоростью возможна около всѣхъ винтовыхъ осей, лежащихъ по одну сторону граничной плоскости S_{23} .

Хотя плоскость S_{13} , параллельная S_{23} , какъ граница области возможныхъ осей теперь никакой роли не играетъ, но она сохраняетъ свое значеніе при опредѣленіи предѣловъ для величины параметра возможной винтовой скорости; а именно, въ областяхъ $(+ + +)$, $(- + -)$ и $(- - -)$ величина p будетъ заключаться или между $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ или между $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$, смотря по тому, съ которой стороны отъ плоскости S_{13} будетъ лежать винтовая ось. Въ области $(+ + -)$ p будетъ всегда заключенъ между $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$, а въ области $(- + +)$ — между $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$.

Съ обратнымъ направленіемъ угловою скорости невозможно никакое винтовое перемѣщеніе около осей разсматриваемаго нами направленія, такъ какъ ни въ одной изъ шести областей (XXVI) не будутъ совмѣстны неравенства (37).

Если нормали n_1 и n_2 расположены въ другомъ порядкѣ (XXVII), то винтовое перемѣщеніе съ угловою скоростью $(+\omega)$ нигдѣ не возможно около осей заданнаго направления; но зато возможно винтовое перемѣщеніе съ угловою скоростью обратнаго направленія около осей, лежащихъ опять по одну сторону граничной плоскости S_{23} .



Разсматривая со-пряженныя области (35) и (38), мы придемъ къ аналогичнымъ результатамъ, которые поэтому и не будемъ здѣсь воспроизводить. Разница будетъ здѣсь только въ томъ, что границею области возможныхъ винтовыхъ осей будетъ служить граничная плоскость S_{13} , а не S_{23} , какъ это было въ предыдущемъ случаѣ.

Соединяя эти результаты вмѣстѣ, можемъ сказать: *Если две изъ трехъ нормалей къ опорнымъ поверхностямъ параллельны но противоположно направлены, то для всякаго направленія, не перпендикулярнаго ни къ одной изъ трехъ нормалей, существуютъ оси, около которыхъ возможна винтовая скорость съ параметромъ, заключающимся между конечными предѣлами, различными для различныхъ осей. Угловая скорость можетъ имѣть на каждой оси только одно изъ двухъ направленій.*

Въ заключеніе еще замѣтимъ, что простые вращенія возможны около тѣхъ осей даннаго направленія, соответствующаго неравенствамъ (34) и (37), которыя лежатъ въ области $(- + -)$ (XXVI). Въ случаѣ неравенствъ (35) и (38) простые вращенія возможны лишь около осей, лежащихъ (XXVII) въ области $(+ - +)$.

Поступательныя перемѣшенія возможны очевидно только по направленіямъ, опредѣляемымъ на чертежѣ (XXIV) дугою EAC .

Обратимся теперь къ *винтовымъ осямъ*, *соответствующимъ границамъ* четырехъ областей на шарѣ XXIV.

Въ случаѣ, когда нормали n_1 и n_2 направлены въ одну сторону, направлениямъ осей, опредѣляемымъ точками круга $AEDC$, соответствующую безконечно большія значенія величинъ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$. Сообразно съ этимъ граничныя плоскости S_{13} и S_{23} (XXV) приходятъ въ совпаденіе съ плоскостями, содержащими нормали n_1 и n_2 . Въ областяхъ (— — +) и (+ + +) величина $\delta_3 \operatorname{lg} \varphi_3$ положительная, а въ областяхъ (— — —) и (+ + —) она отрицательная; съ другой стороны въ областяхъ (— — —) и (— — +) возможна угловая скорость (+ ω), а въ областяхъ (+ + —) и (+ + +) угловая скорость (— ω). Отсюда можно заключить, что въ области (— — +) будутъ лежать возможные винтовья оси съ параметромъ, заключеннымъ между (— ∞) и нѣкоторою положительною величиною, а въ частности будетъ возможно и простое вращеніе (— + ω); въ области (— — —) будутъ возможны винтовья оси съ параметромъ, не превосходящимъ нѣкоторой отрицательной величины и съ угловою скоростью (+ ω), причемъ простое вращеніе не будетъ возможно; въ области (+ + +) будутъ находиться винтовья оси съ параметромъ, не меньшимъ нѣкоторой положительной величины, и съ угловою скоростью (— ω), причемъ опять простое вращеніе не будетъ возможно; наконецъ въ области (+ + —) будутъ возможны винтовья оси съ параметромъ, заключеннымъ между нѣкоторою отрицательною величиною и (+ ∞), причемъ угловая скорость должна имѣть направленіе (— ω), и въ частности будетъ возможно простое вращеніе по этому направленію.

Направлениямъ, опредѣляемымъ точками круга $EBCF$ (XXIV), соответствующую безконечно-большія значенія величины $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$; поэтому граничныя плоскости S_{13} и S_{23} приходятъ въ совпаденіе съ плоскостью нормали n_3 , и слѣдовательно между собою. Область невозможныхъ винтовыхъ осей теперь исчезаетъ. Около осей, лежащихъ въ областяхъ (— — +), (— + +) и (+ + +) возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, равнымъ или превосходящимъ большую изъ величинъ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$,

$\delta_2 tg \varphi_2$, и съ угловою скоростью ($+\omega$); въ частности, около осей области ($---+$) возможно и простое вращение въ вышеуказанную сторону. Въ областяхъ ($++-$), ($-+-$) и ($---$), лежатъ теперь винтовые оси, около которыхъ возможно перемѣщеніе съ параметромъ, не превосходящимъ меньшей изъ величинъ $\delta_1 tg \varphi_1$, $\delta_2 tg \varphi_2$, и съ угловою скоростью ($-\omega$); въ частности, около осей области ($++-$) возможно и простое вращеніе въ указанную сторону.

Разсмотримъ теперь границы областей для случая, когда направленія нормалей n_1 и n_2 противоположны. Если взять какое-нибудь направленіе винтовыхъ осей, перпендикулярное къ этимъ нормалямъ, т. е. соотвѣтствующее одной изъ точекъ круга $AECD$, то опять граничныя плоскости S_{13} и S_{23} придутъ въ совпаденіе съ плоскостями нормалей n_1 и n_2 (XXVI). Такъ какъ величины $\delta_1 tg \varphi$ и $\delta_2 tg \varphi_2$ обратились въ безконечность, то неравенства (34) удовлетворяются конечными значеніями параметра только въ областяхъ ($---+$) и ($-+-$) (XXVI); въ первой изъ нихъ параметръ можетъ имѣть всякое значеніе, равное или превосходящее положительную величину $\delta_3 tg \varphi_3$; а въ области ($-+-$) параметръ долженъ быть не меньше нѣкоторой отрицательной величины, которой равняется здѣсь $\delta_3 tg \varphi_3$. Направленіе вращенія въ обѣихъ областяхъ возможно только въ одну сторону ($+\omega$); во второй области лежатъ оси, около которыхъ возможно и простое вращеніе въ ту-же сторону.

Подобныя-же заключенія можно сдѣлать и по поводу расположенія нормалей, представленнаго на чертежѣ XXVII: возможные винтовые оси будутъ заключены въ областяхъ ($+-+$) и ($+--$) между граничными плоскостями, пришедшими въ совпаденіе съ плоскостями нормалей n_1 и n_2 ; простое вращеніе будетъ возможно около осей второй изъ этихъ областей.

Поступательное перемѣщеніе въ обѣихъ вышеуказанныхъ случаяхъ возможно только по направленіямъ, опредѣленнымъ на чертежѣ XXIV точками дуги EAC .

Направленіямъ, опредѣляемымъ точками круга $EBCF$, соотвѣтствуютъ безконечно-большія значенія величины $\delta_3 tg \varphi_3$, и

граничныя плоскости S_{13} и S_{23} приходятъ въ совпаденіе съ плоскостью нормали n_3 . Согласно неравенствамъ (34), параметръ возможной винтовой скорости долженъ теперь удовлетворять неравенствамъ

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \leq p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (42)$$

при условіи, чтобы нормаль n_3 не препятствовала вращенію $(+\omega)$. Эти требованія будутъ теперь выполнены (XXVI) въ областяхъ $(++-)$, $(-+-)$ и $(---)$; причемъ около осей области $(-+-)$ будетъ возможно и простое вращеніе. Около осей, лежащихъ въ остальныхъ трехъ областяхъ, никакое перемѣщеніе не будетъ возможно.

Подобныя-же заключенія можно сдѣлать и по поводу случая, представленнаго на чертежѣ XXVII, предполагая въ немъ, что винтовая ось перпендикулярна къ нормали n_3 . Въ областяхъ $(+++)$, $(+-+)$ и $(-+-)$ будутъ находиться возможные винтовые оси съ параметромъ, удовлетворяющимъ неравенствамъ (37) и съ вращеніемъ $(-\omega)$; причемъ въ области $(+-+)$ будетъ возможно и простое вращеніе. Около-же осей остальныхъ трехъ областей никакое винтовое перемѣщеніе не будетъ возможно.

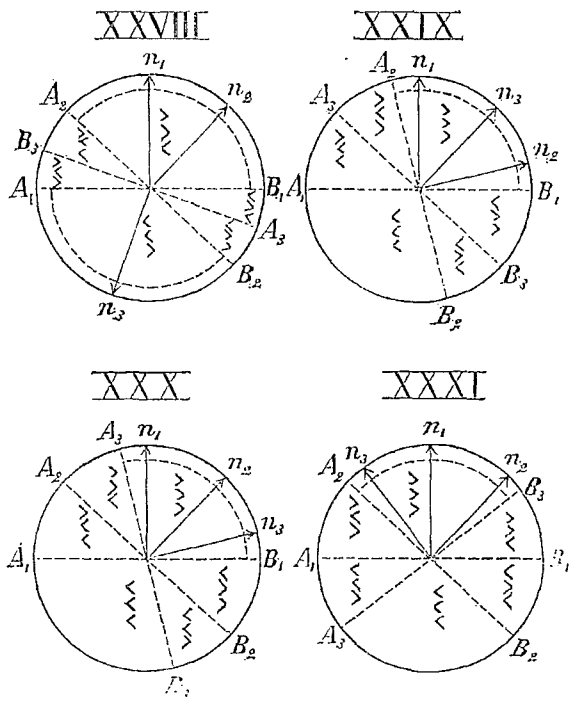
Поступательное перемѣщеніе вообще говоря теперь невозможно, такъ какъ параметръ винтовой скорости заключенъ между конечными предѣлами; только если винтовая ось перпендикулярна ко всѣмъ тремъ нормалямъ, что соответствуетъ на чертежѣ XXIV точкамъ E и C , эти предѣлы обращаются въ $-\infty$ и $+\infty$, и становится возможнымъ поступательное перемѣщеніе вдоль этой оси, притомъ въ обѣ стороны.

Предполагая далѣе, что направленія угловыхъ скоростей не принадлежать непременно границамъ областей, замѣтимъ еще одинъ частный случай двухъ противоположно направленныхъ нормалей: когда онѣ лежатъ на одной прямой. Если-бы не было третьей нормали, то винтовое перемѣщеніе было-бы возможно около всякой оси, но только съ опредѣленною для каждой оси величиною параметра (§ 13). Благодаря присутствію третьей нормали, не параллельной первымъ двумъ, пря-

мы данного направлѣнія дѣлятся на возможные и невозможныя винтовыя оси граничною плоскостью S_{13} или S_{23} , смотря по тому, которая изъ проекцій нормалей n_1 и n_2 на плоскость, перпендикулярную данному направлѣнію, сопровождается знакомъ, противоположнымъ знаку проекціи нормали n_3 . Такимъ образомъ въ настоящемъ случаѣ получается большее стѣсненіе въ перемѣщеніяхъ твердаго тѣла, сравнительно со случаями, представленными на чертежахъ XXVI и XXVII, гдѣ играла роль тоже только одна граничная плоскость, но параметръ винтовой скорости не имѣлъ на каждой оси опредѣленнаго значенія, заключааясь лишь между нѣкоторыми предѣлами.

19. **Возможныя винтовыя оси для случая, когда всѣ три нормали параллельны одной и той-же плоскости.** Теперь изъ 8 областей общаго случая на сферѣ параметровъ одна пара сопряженныхъ областей обращается въ точки; и это можетъ случиться съ каждою изъ четырехъ паръ сопряженныхъ областей.

Эти четыре случая представлены на чертежахъ XXVIII, XXIX, XXX и XXXI, на которыхъ пунктирные прямыя суть слѣды плоскостей, проходящихъ черезъ центръ сферы параметровъ и перпендикулярныхъ къ нормалямъ, а знаки неравенствъ, поставленные внутри областей, образуемыхъ этими плоскостями, соответствуютъ неравенствамъ (32) (39).



Распределение возможных винтовых осей при каких-нибудь ихъ направленихъ, соответствующихъ шести областямъ, ничего существенно новаго не представляетъ; обратимъ вниманіе только на винтовые оси, перпендикулярныя къ тремъ нормалямъ. Прежде всего замѣтимъ, что по направленію, перпендикулярному къ тремъ нормалямъ, возможно поступательное перемѣщеніе, и притомъ въ обѣ стороны. Отсюда слѣдуетъ, что если около какой-нибудь прямой этого направленія будетъ возможно простое вращеніе,—хотя-бы только въ одномъ изъ двухъ направленій,—то будетъ возможно и винтовое перемѣщеніе со всякою величиною параметра. Такимъ образомъ здѣсь вопросъ о предѣлахъ для параметра винтовой скорости отпадетъ и задача сводится къ отысканію осей простого вращенія. Вопросъ дѣлается въ этомъ отношеніи тождественнымъ съ вопросомъ, рассмотрѣннымъ въ § 17. Различіе состоитъ только въ томъ, что на чертежахъ XIX, XX, XXI и XXII и XXIII: 1) у прямыхъ, изображающихъ плоскости нормалей, знаки (+) или (—) 'передъ буквами n_1 , n_2 , n_3 должны быть отброшены, такъ какъ эти нормали теперь параллельны плоскости чертежа; 2) указанные тамъ области осей простыхъ вращеній представляютъ собою теперь области осей, около которыхъ возможно винтовое перемѣщеніе со всякою величиною параметра.

Наибольшее стѣсненіе для осей, перпендикулярныхъ къ тремъ нормалямъ, получается въ томъ случаѣ, когда область возможныхъ осей вращенія будетъ замкнутая (XX), (XXI), (XXII), (XXIII) и когда треугольникъ, изображающій эту область, обратится въ точку: тогда останется возможною только одна винтовая ось, перпендикулярная къ тремъ нормалямъ.

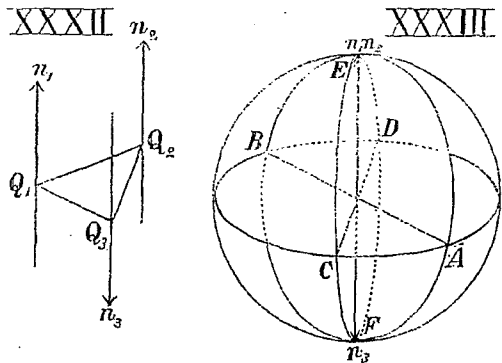
20. Возможныя винтовыя оси въ случаѣ, когда всѣ три нормали параллельны между собою. Здѣсь нужно различать два случая: когда всѣ три нормали направлены въ одну сторону, и когда одна изъ нихъ противоположна двумъ другимъ.

Когда всѣ три нормали въ одну сторону направлены, то, подобно тому, какъ это уже было при двухъ параллельныхъ нормаляхъ, около всякой оси, не перпендикулярной къ нимъ,

возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, величина котораго находится внѣ предѣловъ между наименьшею и наибольшею изъ величинъ (40) (§ 15); причемъ, если угловая скорость образуетъ съ нормальми острый уголъ, p долженъ быть не меньше бѣльшей изъ этихъ величинъ; если-же угловая скорость образуетъ съ нормальми тупой уголъ, то p не долженъ превосходить меньшей изъ нихъ. Въ частности, простое вращеніе возможно только въ томъ случаѣ, если винтовая ось не проходитъ между нормальми. Что касается до винтовыхъ осей, перпендикулярныхъ къ нормальмъ, то около тѣхъ изъ нихъ, которыя не проходятъ между нормальми, возможно винтовое перемѣщеніе со всякою величиною параметра, но только съ однимъ изъ двухъ направленій угловой скорости; около-же прямыхъ, проходящихъ между нормальми, невозможно никакое винтовое перемѣщеніе конечнаго параметра.

Предположимъ теперь, что *одна изъ нормалей, n_3 , противоположна двумъ другимъ*. Пересѣчемъ три нормали плоскостью $Q_1Q_2Q_3$, къ нимъ перпендикулярною (XXXII), проведемъ на сферѣ параметровъ (XXXIII) въ діаметральной плоскости $ACBD$ перпендикулярной къ

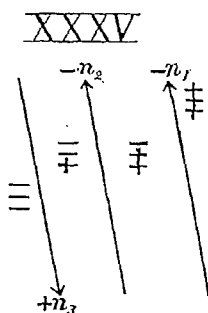
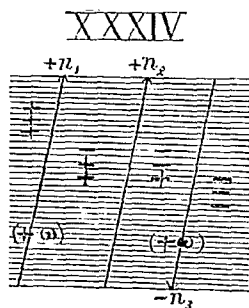
нормальмъ, діаметры AB и CD , соответственно параллельные прямымъ Q_3Q_1 и Q_3Q_2 , и наконецъ черезъ эти діаметры проведемъ плоскости $AEBF$ и $CEDF$, параллельными нормальмъ. По-



верхность сферы раздѣлится на 8 областей и возможность винтовой скорости и величины ея параметра будетъ находиться въ зависимости отъ того, которой изъ этихъ 8 областей будетъ соответствовать направленіе угловой скорости.

Возьмемъ какое-нибудь направленіе угловой скорости, принадлежащее области BEC . Дѣлая изображеніе на плоскости по

правилу § 9, мы увидимъ (XXXIV), что прямая $-n_3$ окажется внѣ промежутка между двумя другими прямыми, $+n_1$ и $+n_2$. Такъ какъ угловая скорость $(+\omega)$ образуетъ съ нормальми n_1 и n_2 острые углы, а съ n_3 тупой уголъ, то параметръ возможной угловой скорости долженъ удовлетворять неравенствамъ (33). Легко видѣть, что оно выполняется теперь во всѣхъ четырехъ областяхъ чертежа XXXIV, такъ какъ вездѣ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ и



$\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ меньше чѣмъ $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$. Въ областяхъ $(+++)$ и $(-++)$ p можетъ, согласно неравенствамъ (33), принимать только положительныя значенія, а въ области $(---)$ только отрицательныя,

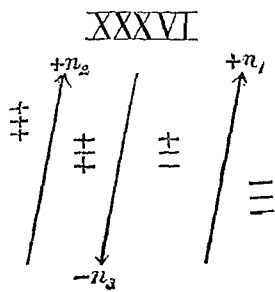
въ области-же $(- - - +)$ p можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ; поэтому въ этой области лежатъ оси, около которыхъ возможно между прочимъ и простое вращеніе.

Если взять противоположное предыдущему направленіе угловой скорости, т. е. принадлежащее области DAF (XXXIII), сопряженной съ областью BEC , то окажется, что съ этою угловою скоростью никакое винтовое перемѣщеніе не возможно. Дѣйствительно, этому случаю будетъ соответствовать чертежъ XXXV, а для величины p — неравенства (36), которыя ни въ одной изъ четырехъ областей чертежа не будутъ совмѣстны.

Подобныя-же результаты получаются, если разсматривать сопряженныя между собою области AED и BFC (XXXIII). Разница будетъ только въ томъ, что теперь винтовыя перемѣщенія будутъ возможны, когда направленіе угловой скорости принадлежитъ второй изъ этихъ областей, т. е. съ первыми двумя нормальми образуетъ тупой уголъ.

Съ угловыми скоростями, направленія которыхъ соответствуютъ остальнымъ четыремъ областямъ BED и CAF , CEA и BDF , никакое винтовое перемѣщеніе не возможно. Дѣйствительно, если взять направленіе угловой скорости, соответству-

ющее области BED , то на плоскости мы получимъ изображеніе XXXVI при условіи существованія неравенствъ (33); а эти неравенства не окажутся совмѣстными ни для одной изъ четырехъ областей этого чертежа. Подобное-же мы найдемъ и въ остальныхъ трехъ случаяхъ CAF , CEA и BDF .



Соединяя все вмѣстѣ, можемъ сказать: *Если три нормали къ опорнымъ поверхностямъ параллельны между собою и притомъ третья нормаль противоположна двумъ первымъ, то для того, чтобы около осей данного направленія было возможно какое-либо винтовое перемѣщеніе, необходимо и достаточно, чтобы заданное направленіе удовлетворяло слѣдующему условію: плоскость, проходящая черезъ третью нормаль и параллельная заданному направленію, должна оказаться лежащею вѣн промежутка между подобными-же плоскостями, проходящими черезъ первыя двѣ нормали.* Около всѣхъ осей какого-либо направленія, удовлетворяющаго этому условію, возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, заключеннымъ между нѣкоторыми, для различныхъ осей различными, но вообще говоря конечными предѣлами и только съ однимъ изъ двухъ направленій вращенія. *Около прямыхъ, не удовлетворяющихъ этому условію, никакое винтовое перемѣщеніе не возможно, если не считать поступательныхъ перемѣщеній, перпендикулярныхъ къ тремъ нормалямъ.*

Здѣсь является единственный случай, когда, при трехъ опорныхъ поверхностяхъ, существуютъ такія направленія, что ни одна изъ системы параллельныхъ прямыхъ этого направленія не можетъ служить осью винтоваго перемѣщенія.

Въ предшествующемъ разсмотрѣніи нужно исключить всѣ винтовыя оси, параллельныя нормалямъ, такъ какъ при такихъ осяхъ вышеуказанныя, проходящія черезъ нормали плоскости становятся неопредѣленными; но относительно этихъ осей мо-

жно непосредственно видѣть, что около нихъ возможно только простое вращеніе въ обѣ стороны.

Если ось параллельна одной изъ двухъ плоскостей, которыя содержатъ нормали противоположнаго направленія, то, какъ мы видѣли въ § 13, параметръ винтовой скорости долженъ имѣть одно определенное значеніе. Эта винтовая скорость будетъ дѣйствительно возможна, если это значеніе параметра удовлетворитъ неравенству, зависящему отъ третьей нормали. При этомъ, подобно общему случаю настоящаго §, или всѣ оси даннаго направленія будутъ возможными или ни одна изъ нихъ.

Относительно винтовыхъ осей, перпендикулярныхъ къ нормалямъ, можно видѣть слѣдующее. Поступательное перемѣщеніе возможно по всѣмъ направленіямъ, перпендикулярнымъ къ нормалямъ; вращеніе-же возможно только около такихъ осей, которыя, удовлетворяя общему вышеизложенному условію, проходятъ кромѣ того между третьей нормалью и одною изъ двухъ нормалей, къ ней ближайшею. Изъ двухъ направленій вращенія около каждой изъ такихъ прямыхъ возможно только одно; параметръ-же винтовой скорости можетъ имѣть всякое значеніе, положительное или отрицательное.

Замѣтимъ еще особенность, представляющуюся въ томъ случаѣ, когда всѣ три нормали лежатъ въ одной плоскости. Если средняя изъ нихъ при этомъ противоположна двумъ другимъ, то вышеуказанное условіе возможности винтовыхъ осей удовлетворяется только для такихъ осей, которыя параллельны плоскости трехъ нормалей, такъ какъ въ этомъ случаѣ области *VED*, *CAF*, *CEA* и *BDF* (XXXIII) невозможныхъ винтовыхъ осей занимаютъ всю сферу, а возможные направленія опредѣляются только точками окружности большого круга, плоскость котораго параллельна плоскости нормалей. Около каждой изъ указанныхъ осей возможна винтовая скорость только съ опредѣленною величиною параметра; а въ частности около осей, лежащихъ въ самой плоскости нормалей, возможно только простое вращеніе; для перпендикулярныхъ-же къ нормалямъ и лежащихъ въ ихъ плоскости осей, возможно винтовое пере-

мѣщеніе со всякимъ параметромъ. Кромѣ того очевидно возможно поступательное перемѣщеніе по всякому другому перпендикулярному къ нормалямъ направленію и вращеніе около всякой оси, параллельной нормалямъ.

Особенность настоящаго случая состоитъ въ томъ, что здѣсь получается для твердаго тѣла наибольшее стѣсненіе, какое только для него возможно, когда оно опирается на три неподвижныхъ поверхности. Въ самомъ дѣлѣ: 1) при всякомъ другомъ расположеніи нормалей существуютъ на сферѣ параметры цѣлыя сплошныя области направленій возможныхъ винтовыхъ осей, а здѣсь эти области состоятъ только изъ двухъ круговыхъ линий; 2) параметръ винтовой скорости имѣетъ для всѣхъ возможныхъ въ разсматриваемомъ случаѣ направленій, кромѣ одного, опредѣленное значеніе, и только для одного направленія онъ остается произвольнымъ; между тѣмъ какъ во всѣхъ другихъ случаяхъ расположенія нормалей кромѣ одного, разсмотрѣннаго въ концѣ § 18, параметръ ограниченъ только нѣкоторыми предѣлами; въ этомъ-же послѣднемъ случаѣ (конца § 18), хотя параметръ и имѣетъ опредѣленные значенія, но зато остаются возможными оси всякаго направленія. Итакъ можно заключить, что *въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей тогда получается наибольшее стѣсненіе твердаго тѣла, когда нормали къ опорнымъ поверхностямъ параллельны, лежатъ въ одной плоскости и средняя нормаль противоположна двумъ другимъ* *).

Четыре опорныхъ поверхности.

21. Условія для возможныхъ винтовыхъ скоростей и число возможныхъ совмѣстно областей на шарѣ параметровъ. Приемы, которые выше примѣнялись къ случаю трехъ опорныхъ поверхностей, указываютъ путь, которымъ можно идти дальше; опять граничныя плоскости будутъ играть самую существенную роль.

*) Нужно поминуть, что здѣсь стѣсненіе разсматривается только по отношенію къ безконечно-малымъ перемѣщеніямъ.

По отношенію къ *направленію* угловой скорости винтоваго перемѣщенія можно всѣ области, которыя вообще могутъ встрѣтиться на шарѣ параметровъ при существованіи четырехъ опорныхъ поверхностей, раздѣлить на *пять группъ*, содержащихъ въ общей сложности 16 случаевъ; хотя и не всѣ эти 16 случаевъ при какомъ-либо заданномъ положеніи четырехъ нормалей будутъ существовать одновременно. Эти пять группъ соотвѣтствуютъ тому, со сколькими нормальями угловая скорость образуетъ острые углы:

1-ая группа: всѣ четыре угла угловой скорости съ положительными направленіями нормалей не превосходятъ прямого; поэтому (§ 4) параметръ угловой скорости удовлетворяетъ условіямъ:

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \geq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4. \quad (43)$$

2-ая группа: угловая скорость образуетъ съ тремя нормальями уголъ, не превосходящій прямого; эта группа содержитъ *четыре* случая, причемъ p будетъ не меньше трехъ изъ величинъ

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 \quad (44)$$

и не больше четвертой.

3-я группа содержитъ *шесть* различныхъ случаевъ, въ которыхъ угловая скорость образуетъ съ двумя нормальями углы, не превосходящіе прямого, параметръ-же p соотвѣтственно не меньше двухъ изъ величинъ (44) и не больше двухъ другихъ.

4-ая группа: уголъ угловой скорости съ одною изъ четырехъ нормалей не больше прямого; такихъ случаевъ *четыре*, причемъ p не меньше одной изъ величинъ (44) и не больше остальныхъ.

5-ая группа, какъ и первая, содержитъ только *одинъ* случай, въ которомъ угловая скорость образуетъ со всѣми четырьмя нормальями уголъ, не меньшій прямого, и соотвѣтственно этому параметръ p не превосходитъ ни одной изъ величинъ (44).

Извѣстно, что k плоскостей, проведенныхъ черезъ центръ шара, раздѣляютъ его поверхность въ общемъ случаѣ на

$$A_k = k(k - 1) + 2 \quad (45)$$

областей.

Поэтому, если шаръ параметровъ пересѣчь k плоскостями, проходящими черезъ его центръ и перпендикулярными къ нормалямъ k опорныхъ поверхностей, то получится A_k областей. Каждой изъ этихъ областей будетъ соответствовать одна изъ 2^k системъ неравенствъ, которымъ можетъ вообще удовлетворять параметръ винтовой скорости; но при $k > 3$, $A_k < 2^k$, и поэтому не всѣ 2^k случаевъ будутъ возможны въ дѣйствительности, если твёрдое тѣло опирается болѣе чѣмъ на три поверхности.

Въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей $A_k = 14$; слѣдовательно каждый разъ изъ 16 случаевъ, заключающихся въ 5 группахъ этого §, два случая будутъ отсутствовать. 14 остающихся областей попарно сопряжены (§ 6); поэтому и исчезающія двѣ области будутъ всегда сопряженныя.

Которая пара сопряженныхъ областей будетъ каждый разъ отсутствовать, можно опредѣлять слѣдующимъ образомъ. Замятимъ 8 областей, соответствующихъ тремъ первымъ нормалямъ, n_1, n_2, n_3 на шарѣ параметровъ. Исчезаніе пары областей находится въ зависимости отъ того, въ которой изъ 8 областей находится положительный конецъ четвертой нормали n_4 . Такъ напр., если направление $(+n_4)$ попадетъ въ область ABC чертежа XVI, то эта область, соответствующая неравенствамъ (32), будетъ теперь вся цѣликомъ соответствовать неравенствамъ (43); и точно такъ-же вся сопряженная ей область EDF , соответствующая неравенствамъ (39), будетъ теперь вся соответствовать и неравенствамъ, обратнымъ относительно неравенствъ (43). Зато неравенства

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \leq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 \quad (46)$$

и сопряженные имъ неравенства

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \geq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 \quad (47)$$

не будутъ удовлетворяться ни одною изъ существующихъ областей, такъ какъ этимъ неравенствамъ, которымъ заключаютъ въ себѣ неравенства (32) и (39), могла-бы удовлетворять только нѣкоторая часть областей ABC и EDF .

Подобныя-же соображенія приложимы и къ остальнымъ 7 случаямъ.

23. Винтовые скорости 1-й и 5-й группъ. Двѣ области, составляющія первую и пятую группу, сопряжены. Около осей, которыя принадлежать этимъ областямъ, возможна винтовая скорость съ параметромъ, величина котораго находится *внѣ* нѣкоторыхъ *предѣловъ*, подобно тому, какъ это было при меньшемъ числѣ опорныхъ поверхностей, когда угловая скорость со всѣми нормальми составляла только острые или только тупые углы.

Не останавливаясь на этомъ подробнѣе, отмѣтимъ слѣдующую особенность, которая является только въ случаѣ, когда число опорныхъ поверхностей не меньше четырехъ, и которая имѣетъ значеніе въ вопросѣ о наибольшемъ стѣпеніи перемѣщеній твердаго тѣла при данномъ числѣ опорныхъ поверхностей. На основаніи сказаннаго въ § 22, четыре нормали могутъ имѣть такое направленіе, что областей первой и пятой группъ не будетъ существовать; тогда вообще не будетъ такихъ винтовыхъ скоростей, параметры которыхъ заключались бы *внѣ* нѣкоторыхъ *предѣловъ*, такъ какъ для винтовыхъ осей, принадлежащихъ всѣмъ остальнымъ областямъ, параметръ возможной винтовой скорости заключается *между* нѣкоторыми *предѣлами*. Принимая во вниманіе все сказанное для случаевъ, когда число опорныхъ поверхностей меньше четырехъ, находимъ: *Для того, чтобы помощью опорныхъ поверхностей, нормали къ которымъ въ точкахъ касанія къ нимъ твердаго тѣла между собою не параллельны, можно было параметръ всякой возможной для твердаго тѣла винтовой скорости заключить между некоторыми, вообще говоря конечными предѣлами, число опорныхъ поверхностей должно быть меньше четырехъ* *).

Понятно, что эти предѣлы, завися отъ δ и φ , будутъ для различныхъ осей различны.

*). Въ случаѣ параллельныхъ нормалей это достигается и меньшимъ числомъ опорныхъ поверхностей (§ 13 и § 20).

24. **Винтовые скорости 2-ой и 4-ой группъ.** Изъ четырехъ случаевъ каждой изъ этихъ группъ достаточно рассмотреть какой-нибудь одинъ; возьмемъ изъ 2-ой группы случай, въ которомъ угловая скорость съ первыми тремя нормальными, n_1, n_2, n_3 , образуетъ уголъ, не превосходящій прямого, а съ четвертою нормалью, n_4 , уголъ не меньшій прямого. Для параметра винтовой скорости будутъ при этомъ существовать неравенства (46). Сопряженному съ нимъ случаю, принадлежащему 4-ой группѣ, будутъ соответствовать неравенства (47). Задавъ какое-нибудь соответствующее этимъ двумъ случаямъ направленіе винтовыхъ осей, сдѣлаемъ на плоскости, къ нимъ перпендикулярной, изображеніе по правилу, указанному въ § 10. На этой плоскости возможны оси съ положительною угловою скоростью будутъ опредѣляться областью, ограничленною изображающими граничныя плоскости прямыми S_{14}, S_{24} и S_{34} , проходящими черезъ точки пересѣченія прямыхъ $(+n_1), (+n_2)$ и $(+n_3)$ съ $(-n_4)$, въ тѣхъ углахъ между ними, въ которыхъ $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$ имѣетъ одинаковый знакъ съ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ и $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$. Не будемъ повторять приводящихъ къ этому разсужденій, такъ какъ онѣ совершенно аналогичны сказанному въ § 10 и § 16 для двухъ и трехъ опорныхъ поверхностей.

Область, опредѣляющая возможные винтовые оси съ угловою скоростью заданнаго направленія, можетъ находиться внутри треугольника, образуемаго прямыми S_{14}, S_{24} и S_{34} , или внѣ его. Это будетъ зависетьъ отъ относительнаго расположенія прямыхъ $(+n_1), (+n_2), (+n_3)$ и $(-n_4)$ и отъ отношенія между величинами (44), т. е. это будетъ зависетьъ отъ относительнаго расположенія четырехъ нормалей и отъ направленія угловой скорости въ предѣлахъ разсматриваемой для этого направленія области.

На чертежѣ XXXVII представленъ случай, когда искома область $(+ \omega)$ ограничена всѣми тремя граничными плоскостями и не замкнута. Для ясности, въ 11 областяхъ, образуемыхъ прямыми $(+n_1), (+n_2), (+n_3)$ и $(-n_4)$, поставлены знаки величинъ (44), опредѣляемые по правилу § 2. На томъ же чертежѣ изображена область возможныхъ винтовыхъ осей

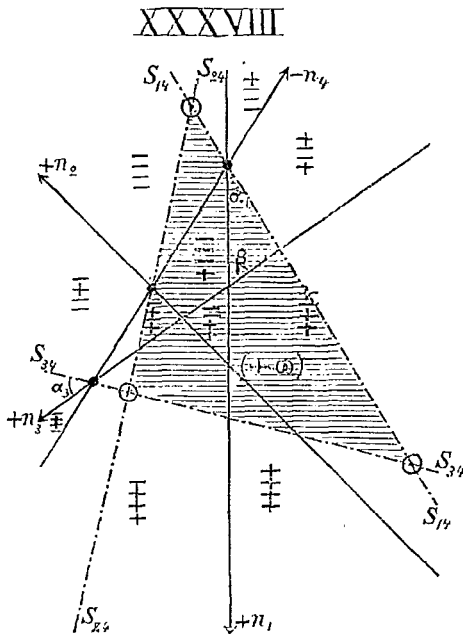
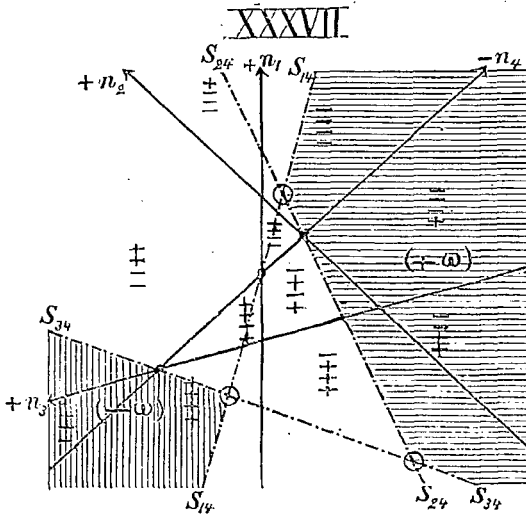
съ обратнымъ направлениемъ угловой скорости ($-\omega$). Такъ какъ теперь неравенства (46) перемѣняются на обратныя неравенства (47), а зна-

ки 11 областей остаются прежними, потому-что они зависятъ только отъ угловъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, отсчитываемыхъ независимо отъ того, какое направление на оси имѣетъ угловая скорость, — то искомая область возможныхъ винтовыхъ скоростей ($-\omega$) должна опредѣляться тѣмъ, что она лежитъ

по другую сторону отъ всѣхъ трехъ прямыхъ S_{12}, S_{22}, S_{32}

сравнительно съ предыдущимъ случаемъ. Эта область на чертежѣ XXXVII ограничена только двумя изъ этихъ прямыхъ, а именно S_{12} и S_{32} .

На чертежѣ XXXVIII представлено такое расположение нормалей, при которомъ область, опредѣляющая возможные винтовые оси, замкнута. Для того, чтобы это было действительно } возможно, необходимо, чтобы, при данномъ расположеніи нормалей, на-



правление угловой скорости, конечно въ предѣлахъ указанной для него на сферѣ параметровъ области, удовлетворило еще нѣкоторымъ добавочнымъ условіямъ. Чтобы дать понятіе объ этихъ условіяхъ, не входя въ подробный разборъ ихъ, отмѣтимъ ихъ на примѣрѣ, представленномъ на чертежѣ XXXVIII. Направленія прямыхъ S_{12} , S_{23} , S_{31} , представляющихъ граничныя плоскости, могутъ измѣняться въ предѣлахъ соответствующихъ имъ угловъ, образуемыхъ прямою ($-n_4$) съ прямыми $(+n_1)$, $(+n_2)$ и $(+n_3)$, и зависеть отъ того (§ 10 и § 11), въ какомъ отношеніи находится $tg \varphi_4$ къ $tg \varphi_1$, $tg \varphi_2$ и $tg \varphi_3$. Положимъ, что прямая S_{23} уже проведена по общему правилу; для того, чтобы область возможныхъ винтовыхъ осей представилась замкнутымъ треугольникомъ, необходимо, чтобы точка пересѣченія прямыхъ S_{12} и S_{31} пришлась съ той стороны отъ прямой S_{23} , съ которой находится область, удовлетворяющая условіямъ

$$p \geq \delta_2 tg \varphi_2, \quad p \leq \delta_4 tg \varphi_4, \quad (48)$$

т. е., на чертежѣ XXXVIII, съ правой стороны. Это будетъ выполнено, если

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \beta < \pi;$$

между прочимъ это можетъ быть достигнуто, если взять углы α_1 и α_3 достаточно малыми, т. е. если, согласно правилу для проведенія граничныхъ плоскостей, взять $tg \varphi_4$ достаточно малымъ въ сравненіи съ $tg \varphi_1$ и $tg \varphi_3$. Такое условіе всегда можетъ быть выполнено въ дѣйствительности. А именно, когда существуютъ на шарѣ параметровъ области, соответствующія неравенствамъ (46) и (47), то отрицательное направленіе нормали n_4 можно задать точкою области ABC (XVI); тогда всѣ точки этой области будутъ удовлетворять неравенствамъ (46), а точки сопряженной ей области EDF — неравенствамъ (47). Въ этомъ случаѣ для винтовой оси можно взять направленіе какъ угодно близкое къ направленію n_4 и слѣдовательно численное значеніе $tg \varphi_4$ сдѣлать достаточно малымъ сравнительно съ численными значеніями $tg \varphi_1$ и $tg \varphi_3$. Замѣтимъ еще, что области ABC и EDF (XVI) можно по желанію какъ угодно

связать и достигнуть того, что для всякаго направленія, соотвѣтствующаго неравенствамъ (46), возможны винтовья оси будутъ на перпендикулярной къ нимъ плоскости опредѣляться замкнутою областью треугольника. Понятно, что не только направление, но и *относительное расположеніе* четырехъ нормалей должно быть при этомъ, какъ на чертежѣ XXXVIII, взято надлежащее; напр. при расположеніи, представленномъ на чертежѣ XXXVII это никогда не можетъ быть достигнуто.

Когда винтовья оси съ заданнымъ направленіемъ угловой скорости опредѣляются замкнутою площадью треугольника (XXXVIII), то винтовьяхъ осей съ обратнымъ направленіемъ угловой скорости вовсе не будетъ; потому-что, если измѣнить направленіе угловой скорости на обратное, то по отношенію къ каждой изъ граничныхъ плоскостей S_{12} , S_{23} и S_{31} ,—вслѣдствіе перемѣны неравенствъ (46) на обратныя имъ неравенства (47),—возможная область дѣлается невозможною и обратно; такимъ образомъ теперь возможная область для $(-\omega)$ должна была-бы находиться по другую сторону каждой изъ трехъ прямыхъ S_{12} , S_{23} , S_{31} , чѣмъ находится треугольникъ $(+\omega)$, а такая область въ дѣйствительности существовать не можетъ.

Для того, чтобы возможныя винтовья оси даннаго направленія и съ конечными параметрами винтовой скорости на перпендикулярной къ нимъ плоскости могли опредѣляться замкнутою областью, необходимо имѣть по крайней мѣрѣ четыре опорныхъ поверхности. При этомъ область будетъ замкнутою не только для даннаго направленія но и для направленій достаточно къ нему близкихъ.

25. Винтовья скорости 3-й группы. Чтобы разобратъ въ случаяхъ 3-й группы, обратимся сначала къ случаю трехъ опорныхъ поверхностей и вспомнимъ (§ 16), что когда параметры удовлетворяютъ одной изъ системъ неравенствъ (33), (34), (35) или обратныхъ имъ неравенствъ (36), (37), (38), то возможныя винтовья оси даннаго направленія, принадлежащаго одной изъ соотвѣствующихъ этимъ неравенствамъ областей, заключены въ одной изъ двухъ паръ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ двумя граничными плоскостями;

для осей одного изъ этихъ угловъ угловая скорость имѣетъ одно направленіе, а для осей другого угла—направленіе противоположное. Разсмотримъ теперь изъ шести случаевъ третьей группы, которые попарно сопряжены, слѣдующіе два сопряженныхъ:

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \leq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4; \quad (49)$$

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \geq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4. \quad (50)$$

Найдемъ сначала по правилу, указанному въ § 15, пару вертикальныхъ угловъ, содержащихъ винтовые оси, удовлетворяющія неравенствамъ

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad (51)$$

или

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad (52)$$

а потомъ пару вертикальныхъ угловъ, которымъ соответствуютъ неравенства

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4, \quad (53)$$

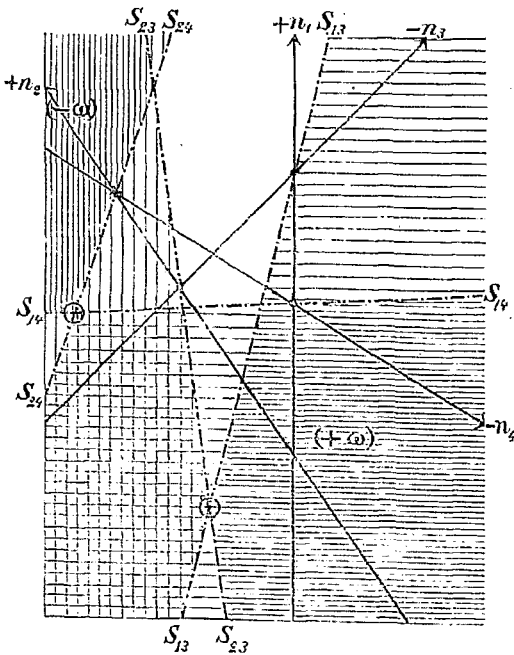
или

$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4. \quad (54)$$

Очевидно, что возможные винтовые оси должны находиться въ областяхъ, которыя одновременно принадлежать угламъ (51) и (53) или (52) и (54). Такихъ областей можетъ оказываться *два* (соотвѣтственно двумъ противоположнымъ направленіямъ угловой скорости) или *одна* (съ тѣмъ или другимъ направленіемъ угловой скорости) или *ни одной*. Четыре такихъ случая представлены на чертежахъ XXXIX, XL, XLI и XLII; причемъ, какъ было и раньше, горизонтальными штрихами затушеваны области возможныхъ винтовыхъ осей съ однимъ направленіемъ угловой скорости ($+\omega$), а вертикальными штрихами—области винтовыхъ осей съ обратнымъ направленіемъ угловой скорости ($-\omega$). Области, въ которыхъ штрихи одного рода вдвое чаще, представляютъ области дѣйствительно возможныхъ винтовыхъ осей, т. е. удовлетворяющихъ неравен-

ствамъ (51) и (53) или (52) и (54). Подробнаго описанія этихъ чертежей не дается, такъ какъ приемъ для опредѣленія знаковъ въ различныхъ областяхъ между прямыми $(+n_1)$, $(+n_2)$, $(-n_3)$ и $(-n_4)$ и правило для проведенія на основаніи этихъ знаковъ прямыхъ S_{13} , S_{23} , S_{14} и S_{24} были уже подробно изложены раньше. Параметры въ случаяхъ XXXIX, XL и XLI будутъ заключены между некоторыми, вообще говоря, конечными предѣлами. Въ случай-же XLII возможныхъ винтовыхъ осей вообще не будетъ. Итакъ находимъ:

XXXIX

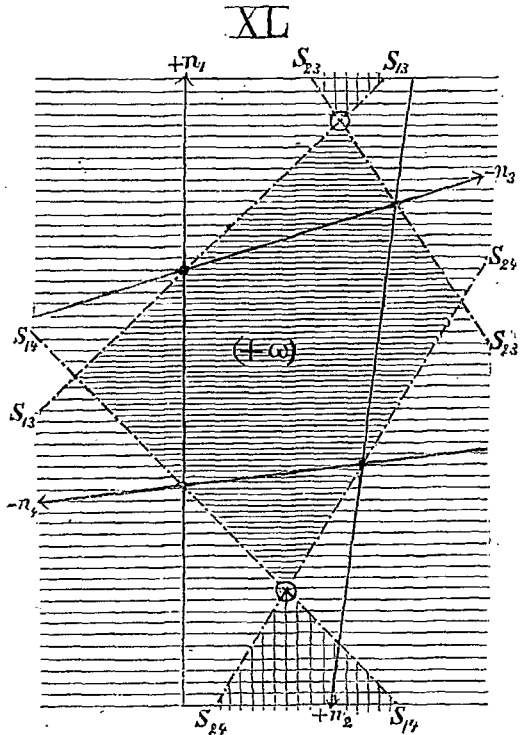


Для того, чтобы при какихъ-нибудь произвольныхъ но не параллельныхъ направленіяхъ нормалей къ опорнымъ поверхностямъ существовали такія направленія прямыхъ, по которымъ никакія винтовья оси не возможны, необходимо, чтобы число опорныхъ поверхностей было не меньше четырехъ и чтобы предполагаемое направленіе угловой скорости образовало съ двумя нормальями острый уголъ, а съ двумя другими нормальями—тупые углы *). Кроме того, самое расположеніе нормалей и величины угловъ φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 должны быть подчинены некоторымъ ограничивающимъ условіямъ, въ разборъ которыхъ входить не будемъ.

*) Выше, въ § 20, было показано, что если нормали между собою параллельны, то это возможно и при трехъ опорныхъ поверхностяхъ.

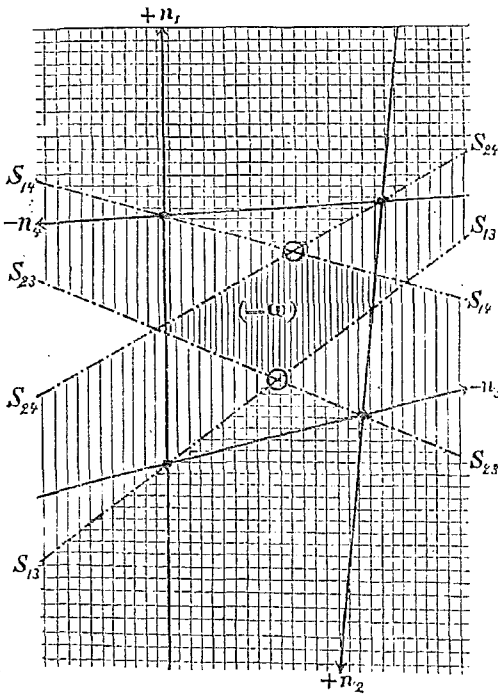
26. **Возможныя винтовыя оси съ параметромъ, равнымъ нулю или безконечности.** Послѣ сказаннаго въ § 17 объ осяхъ простыхъ вращеній при трехъ опорныхъ поверхностяхъ, легко видѣть, что теперь, въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей, оси даннаго направленія, около которыхъ возможно простое вращеніе, будутъ на перпендикулярной къ этому направленію плоскости представляться или въ видѣ двухъ незамкнутыхъ областей или въ видѣ одной замкнутой области или совсѣмъ будутъ отсутствовать.

Главный интересъ представляетъ для насъ послѣдній случай, въ смыслѣ большаго стѣсненія движенія. Можно убѣдиться, что *каково-бы ни было данное положеніе трехъ опорныхъ поверхностей, всегда можно четвертую опорную поверхность расположить такъ, что простое вращеніе около осей какаго-либо даннаго и смежныхъ съ нимъ направленій сдѣлается невозможнымъ.* Покажемъ это для одного случая; въ остальныхъ же случаяхъ это можетъ быть повѣрено подобнымъ-же образомъ. Пусть заданное направленіе винтовыхъ осей относится къ 1-й и 5-й группамъ и слѣдовательно параметръ p удовлетворяетъ неравенствамъ (43) или неравенствамъ имъ обратнымъ и пусть чертежъ XIX представляетъ проекціи трехъ первыхъ нормалей n_1, n_2, n_3 на плоскость, перпендикулярную къ осямъ; положеніе-же четвертой нормали, n_4 , предоставимъ сво-



сму выбору. Осп, около которыхъ возможно простое вращеніе съ угловою скоростью, образующею, согласно неравенствамъ

XLI



(43), со всѣми четырьмя нормальными острыми углами, должны на указанной плоскости опредѣляться областью (— — — —); такъ какъ только въ такой области неравенства (43) совместны съ условіемъ $p = 0$; и точно такъ-же обратному направлению угловою скорости простаго вращенія должна соответствовать область (+ + + +). Понятно, что такіа области могутъ принадлежать только областямъ (— — —) и (+ + +) чертежа XIX; и отъ положенія проекціи четвертой нормали будетъ за-

висѣть, существуютъ-ли онѣ въ дѣйствительности или нѣтъ. Чертежи XLIII, LXIV, XLV и XLVI представляютъ повтореніе чертежа XIX съ добавленіемъ прямой ($+n_4$). На чертежѣ XLIII она расположена такъ, что области (+ ω) и (— ω) остаются безъ измѣненія; на чертежѣ XLIV, на которомъ прямая ($+n_4$), сравнительно съ чертежомъ XLIII, передвинута немного книзу, одна изъ этихъ областей (+ ω) получила сокращеніе; на чертежѣ XLV эта область совсѣмъ исчезаетъ, а другая дѣлается замкнутою; наконецъ, на чертежѣ XLVI обѣ области исчезаютъ и слѣдовательно не остается прямыхъ даннаго направленія, около которыхъ было-бы возможно простое вращеніе.

Подобно чертежу XIX остальные, относящіеся къ тому-же вопросу чертежи XX, XXI, XXII и XXIII могутъ быть при помощи четвертой прямой ($+n_4$) или ($-n_4$) дополнены такимъ

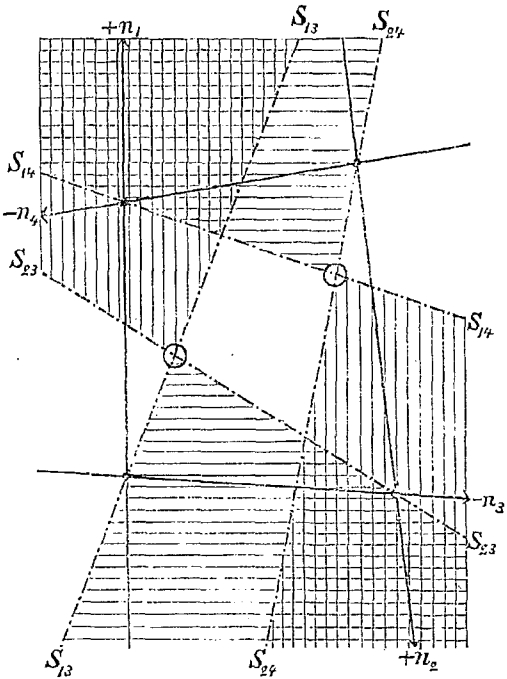
образомъ, что область возможныхъ простыхъ вращеній или останется безъ измѣненій или отчасти сократится или совсѣмъ изчезнетъ. При этомъ очевидно, что надлежащимъ положеніемъ прямой $(+n_4)$ или $(-n_4)$ всегда можетъ быть достигнутъ послѣдній изъ этихъ случаевъ, каковы-

бы ни были положенія прямыхъ n_1, n_2, n_3 и ихъ условные (§ 10) знаки $(+)$ или $(-)$, а также, къ какой-бы изъ пяти группъ (§ 20) не принадлежало направленіе угловой скорости; потому-что прямая $(+n_4)$ раздѣляетъ всю плоскость чертежа на области $(+\omega)$ и $(-\omega)$ простыхъ вращеній и можетъ быть

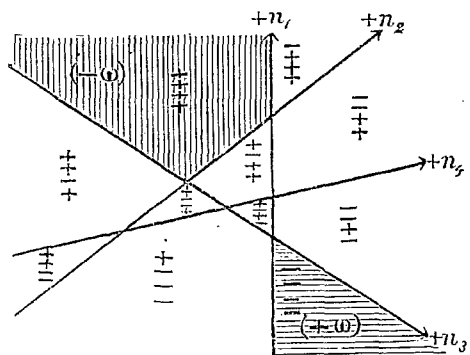
всегда проведена такъ, что эти области покрываютъ собою соотвѣтствующія тремъ первымъ опорнымъ поверхностямъ области простыхъ вращеній съ обратными знаками угловой скорости.

Хотя уничтоженіе осей простого вращенія можетъ быть достигнуто для каждаго заданнаго въ отдѣльности направленія ихъ, но отсюда еще не слѣдуетъ, чтобы возможно было такое расположе-

XLII

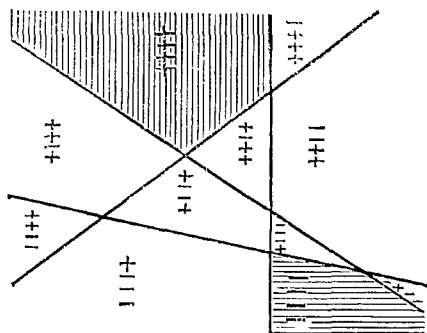


XLIII

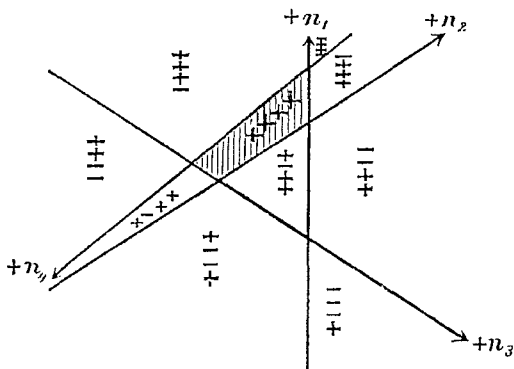


не нормалей, при которомъ вообще

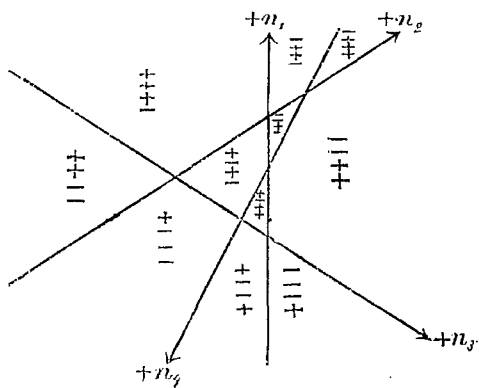
XLIV



XLV



XLVI



пикакихъ осей про-
стого вращения не
останется. Виро-
чемъ при слѣдую-
щемъ ниже разбо-
рѣ особенныхъ слу-
чаевъ положенія че-
тырехъ нормалей
мы увидимъ (§ 30),
что это возможно
въ дѣйствительности
для всѣхъ направле-
ній кромѣ одного.

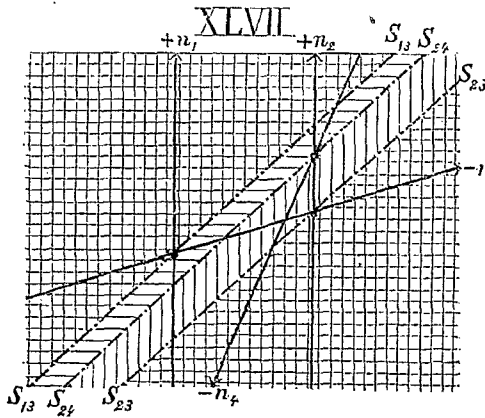
Кстати замѣ-
тимъ здѣсь, что по-
мощью четырехъ
опорныхъ поверхно-
стей можно заста-
вить твердое тѣло
имѣть только пере-
мѣщенія около не-
подвижной точки.
Для этого нужно,
чтобы четыре нор-
мали пересѣкались
въ одной точкѣ; а
направления ихъ
должны удовлетво-
рять условію, что-
бы на сферѣ нара-
метровъ не остава-
лось областей, при-
надлежащихъ пер-
вой и пятой груп-
памъ. На этомъ слу-
чаѣ, который можно

было-бы разобрать помощью общаго приѣма настоящей статьи, не будемъ далѣе останавливаться, такъ какъ онъ явствуетъ изъ известнаго способа сдѣлать центръ шара неподвижнымъ помощью четырехъ точекъ опоры. Если тѣло не имѣетъ формы шара, но на его поверхности даны точки, въ которыхъ нормали удовлетворяютъ вышесказанному условію, то и для него помощью четырехъ прикасающихся къ нему въ этихъ точкахъ опорныхъ поверхностей будетъ достигнуто уничтоженіе всякихъ винтовыхъ осей, кромѣ осей вращенія, проходящихъ черезъ точку пересѣченія всѣхъ четырехъ нормалей, если конечно ограничиваться перемѣщеніями безконечно-малыми.

Предыдущія разсужденія указываютъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что для уничтоженія всякихъ поступательныхъ перемѣщеній необходимо и достаточно имѣть четыре опорныхъ поверхности. Это слѣдуетъ уже непосредственно изъ сказаннаго въ § 22 о томъ, что параметры всѣхъ вообще возможныхъ винтовыхъ скоростей могутъ быть теперь заключены между конечными предѣлами. Съ другой-же стороны это видно и изъ конца § 17; а именно, при четырехъ опорныхъ поверхностяхъ область *ABC* (XVI) можетъ совсѣмъ исчезнуть, и тогда никакое поступательное перемѣщеніе не остается возможнымъ. Оба заключенія впрочемъ тождественны въ своемъ основаніи.

27. Случай, когда двѣ изъ четырехъ нормалей между собою параллельны. Послѣ подробнаго разбора, сдѣланнаго въ § 18 относительно случая трехъ опорныхъ поверхностей, когда двѣ изъ трехъ нормалей параллельны, можно теперь ограничиться краткими замѣчаніями. Прибавленіе четвертой нормали къ тремъ нормалямъ § 18 можетъ или 1) оставить области возможныхъ винтовыхъ осей безъ измѣненія или 2) сократить одну или 3) обѣ эти области ($+\omega$) и ($-\omega$) или наконецъ 4) совсѣмъ ихъ уничтожить. Это будетъ зависетьъ какъ отъ направленія и положенія четвертой нормали такъ и отъ выбраннаго нами общаго направленія винтовыхъ осей. Первый, второй и четвертый изъ этихъ случаевъ возможны только тогда, когда граничныя плоскости S_{14} и S_{24} будутъ параллельны граничнымъ плоскостямъ S_{13} и S_{23} ; для этого

нѣтъ необходимости, чтобы нормаль n_4 была параллельна нормали n_3 : нужно только, чтобы отношенія $tg \varphi_1 : tg \varphi_4$ и $tg \varphi_2 : tg \varphi_4$ были равны равнымъ между собою отношеніямъ (§ 18) $tg \varphi_1 : tg \varphi_3$ и $tg \varphi_2 : tg \varphi_3$, т. е, чтобы n_4 составляла съ даннымъ направлениемъ винтовой оси такой-же уголъ какъ n_3 . На чертежѣ XLVII представленъ четвертый случай, когда об-



ласти возможныхъ винтовыхъ осей данного направления совсѣмъ исчезаютъ; этотъ чертежъ представляетъ собою чертежъ XXV, дополненный проекціею четвертой нормали, удовлетворяющей вышесказаннымъ условіямъ и расположенной такъ, что области $(+\omega)$ и $(-\omega)$

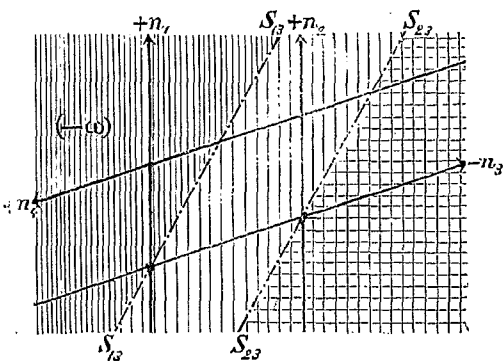
чертежа XXV вполне покрываются областями $(-\omega)$ и $(+\omega)$, опредѣляемыми прямою S_{24} . Подобную-же роль могла-бы здѣсь играть и прямая S_{14} , еслибы $(-n_4)$ пересѣкалась съ $(+n_1)$ въ точкѣ, которая лежитъ въ промежуткѣ между прямыми S_{13} и S_{23} .

Въ другихъ случаяхъ, соответствующихъ чертежамъ XXVI и XXVII это уничтоженіе можетъ быть достигнуто подобнымъ-же образомъ.

28. Четыре нормали попарно параллельны. Въ этомъ случаѣ получаются результаты, подобные предыдущимъ; т. е. области возможныхъ винтовыхъ осей вообще говоря сокращаются, а могутъ быть и совсѣмъ уничтожены. На нѣкоторыхъ особенностяхъ сравнительно съ предыдущимъ случаемъ останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что когда параллельныя между собою нормали n_1 и n_2 направлены въ одну сторону, полное уничтоженіе не достигается. Дѣйствительно, если n_3 и n_4 также въ одну сторону направлены, то это очевидно само собою; если-же онѣ направлены въ противоположныя стороны (XLVIII), то,

согласно сказанному в § 13, уничтожается только одна из областей $(+\omega)$, $(-\omega)$, в данном случае область $(+\omega)$. Но уничтожение обеих областей может быть достигнуто, если не только нормали n_1 и n_2 противоположно направлены, но если и n_2 противоположно n_3 ; так как при трех нормалях существует только одна из областей $(+\omega)$, $(-\omega)$ [(XXVI) и (XXVII)], а она введением четвертой нормали

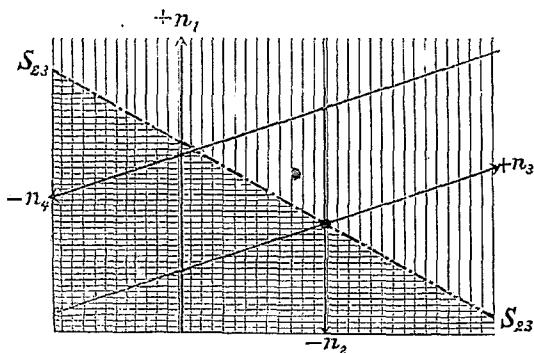
XLVIII



может быть покрыта областью с противоположным направлением угловой скорости. Эти случаи изображены на чертежах (XLIX) и (L), которые представляют собою соответственные дополнения чертежей (XXVI) и (XXVII). Возможность этого уничтожения видна

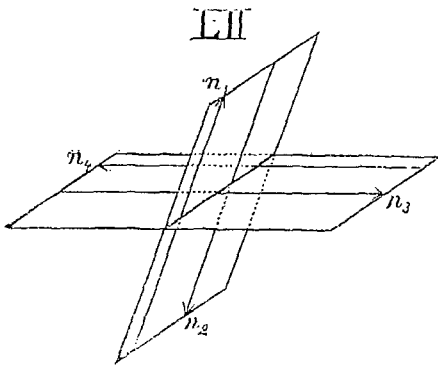
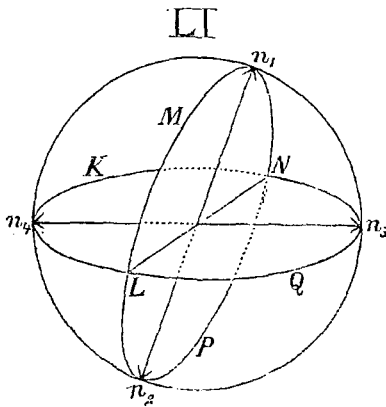
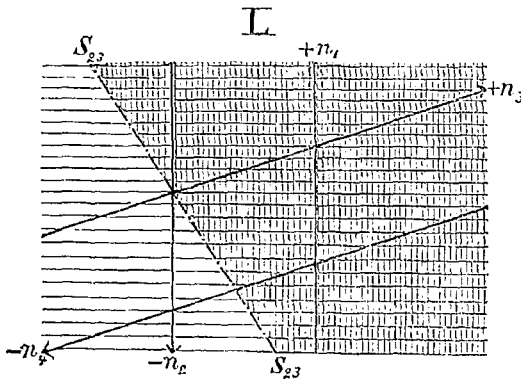
также непосредственно из § 13. При двух опорных поверхностях, нормали к которым параллельны и противоположно направлены, возможна винтовая скорость около всех осей данного направления, но с условием,

XLIX



чтобы угловая скорость имела при этом только одно из двух направлений, которое зависит от относительного положения двух нормалей. Поэтому, если имеем две пары параллельных и противоположно направленных нормалей, то можем их всегда расположить таким образом, чтобы около осей дан-

наго направлення не была возможна угловая скорость винтового перемѣщенія ни въ ту ни въ другую сторону; тогда не будетъ возможно и самое винтовое перемѣщеніе.



Когда даны четыре нормали попарно параллельными и противоположно направленными, то легко найти всѣ направлення осей, около которыхъ никакія винтовыя перемѣщенія не будутъ возможны. Для этого пересѣчемъ сферу параметровъ (LI) двумя діаметральными плоскостями $LMNP$ и $LKNQ$, параллельными плоскостямъ, содержащимъ нормали n_1 , n_2 и n_3 , n_4 (LII). Сравнивая чертежи (LI) и (LII) съ чертежами (XLIX) и (L), легко замѣтитъ, что тѣ направлення угловыхъ скоростей, которыя соотвѣтствуютъ невозможнымъ винтовымъ осямъ, опредѣляются на парѣ (LI) сопряженными областями двухсторонниковъ $LMNQ$ и $LKNP$. Если векторы, изображающіе попарно параллельныя и противоположныя нормали

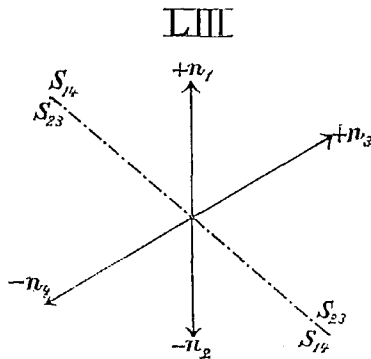
опредѣляются на парѣ (LI) сопряженными областями двухсторонниковъ $LMNQ$ и $LKNP$. Если векторы, изображающіе попарно параллельныя и противоположныя нормали

къ опорнымъ поверхностямъ, разсматривать какъ пары силъ, то можно сказать: невозможны винтовья оси такихъ направлений, по которымъ угловья скорости, производимья парамъ силъ (n_1, n_2) и (n_3, n_4) , будутъ противоположныхъ знаковъ *).

Замѣтимъ еще случай, когда каждая пара противоположныхъ нормалей лежитъ на одной прямой. Мы знаемъ, что въ случаѣ одной такой пары нормалей возможно винтовое перемѣщеніе около всякой прямой, но съ опредѣленною величиною параметра $\delta \operatorname{tg} \varphi$. Поэтому, если существуютъ двѣ пары такихъ нормалей, винтовое перемѣщеніе будетъ возможно только около тѣхъ прямыхъ, для которыхъ величина $\delta \operatorname{tg} \varphi$ по отношенію къ каждой изъ нормалей одинакова. Легко видѣть, что такіе оси для каждаго даннаго направления образуютъ плоскость. А именно, проведемъ граничныя плоскости S_{14} и S_{23} (LIII), которыя въ данномъ случаѣ совпадаютъ: эти плоскости и содержатъ тѣ оси даннаго направления, для которыхъ

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4.$$

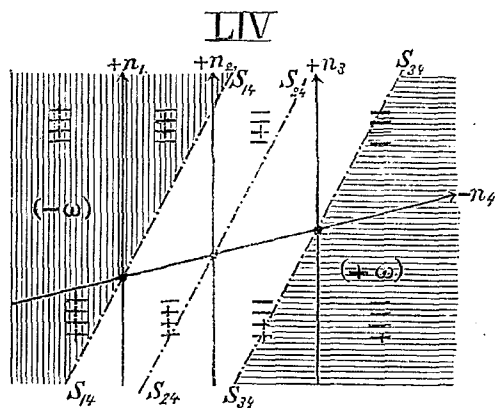
Настоящій случай представляетъ твердое тѣло, которое не можетъ отходить отъ двухъ опорныхъ поверхностей, напр. первой и второй. Извѣстно, что въ этомъ случаѣ всѣ винтовья оси даннаго параметра образуютъ конгруэнцію перваго порядка. Итакъ можно указаннымъ выше путемъ построить принадлежащую одной изъ этихъ конгруэнцій винтовую ось даннаго направления и съ данною величиною параметра.



*) Эта формулировка кинематическаго результата имѣетъ и свое динамическое основаніе, такъ какъ по направлению четырехъ нормалей дѣйствуютъ сопротивленія опорныхъ поверхностей, вызываемыя какими либо приложенными къ твердому тѣлу динамами.

29. Три изъ четырехъ нормалей къ опорнымъ поверхностямъ между собою параллельны. Этотъ случай можно разсматривать, пользуясь результатами § 20. Указанны тамъ области возможныхъ винтовыхъ осей получаютъ теперь введеніемъ четвертой нормали ограниченіе, которое можно каждый разъ опредѣлить по общимъ уже много разъ примененнымъ здѣсь правиламъ. Ограничимся поэтому теперь только нѣкоторыми краткими указаніями.

Если три параллельныхъ нормали n_1, n_2, n_3 въ одну сторону направлены, то по направленіямъ, для которыхъ всѣ четыре величины (44) имѣютъ одинаковые знаки, будутъ возможны винтовые оси съ параметрами, величины которыхъ, какъ и въ общемъ случаѣ, находятся *внѣ* нѣкоторыхъ конечныхъ предѣловъ. Относительно направленій, для которыхъ первыя три изъ величинъ (44) имѣютъ одинъ знакъ, а четвертая $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$, соотвѣтствующая непараллельной нормали, знакъ противоположный, мы найдемъ ограниченія возможныхъ областей, подобныя тѣмъ, которыя указаны въ § 18 на чертежѣ XXV, причемъ одна изъ трехъ прямыхъ n_1, n_2, n_3 , средняя, и соотвѣтствующій ей слѣдъ граничной плоскости не будутъ играть никакой роли (LIV).



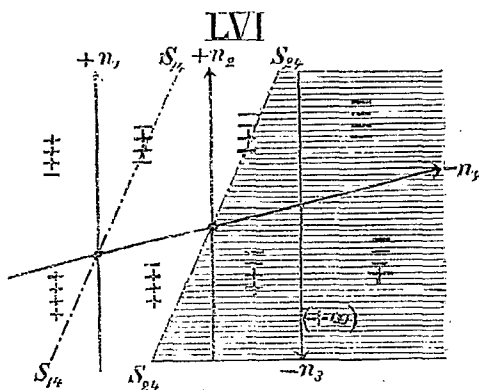
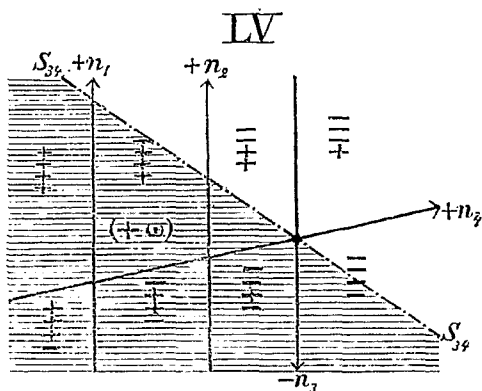
Если двѣ изъ трехъ параллельныхъ нормалей въ одну сторону направлены а третья имѣ противоположна, то, согласно § 20, или вся плоскость чертежа представляетъ область возможныхъ винтовыхъ скоростей съ *однимъ* направлениемъ угловой скорости или винтовые оси даннаго направленія совсѣмъ

не возможны. Въ послѣднемъ изъ этихъ случаевъ четвертая нормаль не вводитъ новыхъ ограниченій винтовыхъ скоростей,

ограничивая лишь поступательныя перемѣщенія, перпендикулярныя къ тремъ параллельнымъ нормалямъ; въ первомъ-же случаѣ плоскость чертежа будетъ раздѣлена слѣдомъ только одной изъ граничныхъ плоскостей, по одну сторону которой и будетъ находиться возможная область. Ограниченія эти опять аналогичны указаннымъ въ § 18. Чертежи (LV) и (LVI) относятся къ этому случаю; на второмъ изъ нихъ играетъ роль только одна изъ двухъ возможныхъ въ этомъ случаѣ граничныхъ плоскостей S_{1a} и S_{2a} .

Если три параллельныя нормали лежатъ въ одной плоскости и средняя противоположна двумъ другимъ, то (§ 20) для тѣла возможны только винтовыя перемѣщенія съ опредѣленнымъ для каждой оси параметромъ около осей, параллельныхъ плоскости трехъ нормалей, и кромѣ того всякія поступательныя перемѣщенія, къ нормалямъ перпендикулярныя, и винтовое

перемѣщеніе съ произвольнымъ параметромъ около осей, которыя перпендикулярны къ тремъ нормалямъ и лежатъ въ ихъ плоскости. Если нормаль къ четвертой опорной поверхности какъ ибудь пересѣкаетъ плоскость первыхъ трехъ нормалей, то перемѣщеніе около оси, этой плоскости параллельной, будетъ возможно только въ томъ случаѣ, если соответствующее этой оси значеніе параметра, опредѣляемое тремя нормалями,



не будет противорѣчить неравенству, вводимому четвертою нормалью. Построивъ для этого направленія граничныя плоскости S_{14} , S_{24} , S_{34} , которыя теперь совпадаютъ, легко видѣть, что онѣ раздѣляютъ все пространство на двѣ области, изъ которыхъ въ одной лежатъ оси, допускающія одно направленіе угловой скорости, а въ другой—обратное направленіе ея; параметръ-же на каждой оси будетъ имѣть одно опредѣленное значеніе. Такимъ образомъ присутствіе четвертой нормали вводитъ только то ограниченіе, что лишаетъ каждую ось одного изъ направленій угловой скорости. Перпендикулярныя къ тремъ параллельнымъ нормальямъ поступательныя перемѣщенія тоже получаютъ ограниченіе съ одной стороны: для нихъ остаются возможными только направленія, образующія острые углы съ направленіемъ четвертой нормали; и только поступательныя перемѣщенія, перпендикулярныя ко всѣмъ четыремъ нормальямъ, остаются возможными въ обѣ стороны.

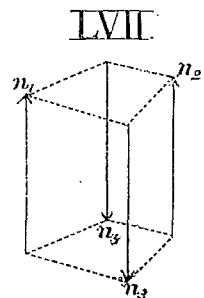
30. Случай, когда всѣ четыре нормали между собою параллельны. Когда при этомъ всѣ нормали направлены въ одну сторону, ничего новаго сравнительно съ случаемъ трехъ опорныхъ поверхностей не получается. Случаи-же, когда одна или двѣ нормали противоположны остальнымъ, заслуживаютъ вниманія, такъ какъ подлежащимъ ихъ расположеніемъ можетъ быть достигнуто полное уничтоженіе всякихъ винтовыхъ скоростей съ параметромъ, не равнымъ нулю или безконечности *).

Пусть будетъ нормаль n_4 противоположна тремъ остальнымъ. Въ § 20, для случая трехъ параллельныхъ нормалей, было указано, что если одна изъ этихъ нормалей противоположна двумъ другимъ, то существуютъ такіа направленія, по которымъ никакія винтовыя оси не возможны. Необходимое и достаточное условіе для этихъ направленій состоитъ въ томъ, чтобы плоскость, параллельная такому направленію и прохо-

*) Соответствующее этому расположеніе опорныхъ поверхностей часто примѣняется на практикѣ. Упоминаемъ о немъ здѣсь только для того, чтобы показать, какъ оно вытекаетъ изъ общихъ соображеній настоящей статьи.

дящая через ту нормаль, которая противоположна двумъ другимъ, находилась между подобными-же плоскостями, проведенными через двѣ другія нормали. Если вмѣсто трехъ нормалей даны четыре, изъ которыхъ одна, n_4 , противоположна тремъ остальнымъ, то эти нормали всегда могутъ быть расположены такимъ образомъ, чтобы для *всякаго* направленія винтовыхъ осей плоскость, параллельная этому направленію и проведенная через нормаль n_4 , пахотилась между двумя изъ трехъ подобныхъ-же плоскостей, проведенныхъ через остальные нормали. Для этого нужно только нормаль n_4 помѣстить внутри призмы, образуемой нормальми n_1, n_2, n_3 . Тогда будутъ уничтожены всякія винковыя скорости, параметръ которыхъ не равенъ нулю или бесконечности. Остаются возможными только поступательныя перемѣщенія по всякимъ направленіямъ, перпендикулярнымъ къ четыремъ нормальямъ, и простыя вращенія около осей, параллельныхъ этимъ нормальямъ, т. е. остаются возможными всякія перемѣщенія параллельно плоскости.

Предположимъ теперь, что двѣ нормали, n_3 и n_4 , противоположны двумъ другимъ. И въ этомъ случаѣ подходящимъ расположеніемъ нормалей можно достигнуть того-же самаго. Основываясь опять на сказанномъ въ § 20, мы должны расположить четыре нормали такимъ образомъ, чтобы для всякаго направленія по крайней мѣрѣ одна параллельная ему и содержащая одну изъ нормалей плоскость оказывалась заключенною между двумя подобными-же плоскостями, содержащими нормали противоположнаго направленія. Это будетъ достигнуто, если четыре нормали будутъ служить ребрами четырехгранной призмы *безъ входящаго двуграннаго угла* и если при этомъ нормали одинаковаго направленія будутъ расположены въ диагональныхъ плоскостяхъ этой призмы (LVII). И въ этомъ случаѣ остаются возможными только перемѣщенія параллельно плоскости, къ которой нормали перпендикулярны.



31. Три или всё четыре нормали параллельны одной плоскости. Ограничимся несколькими замечаніями, касающимися только осей, перпендикулярныхъ къ этимъ тремъ или четыремъ нормалямъ, такъ какъ для другихъ направленій существенныхъ особенностей не представляется.

Въ § 19 было замѣчено, что въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей, нормали къ которымъ параллельны одной плоскости, около перпендикулярныхъ къ этимъ нормалямъ осей возможны винтовые скорости съ произвольнымъ параметромъ, если эти оси принадлежать къ некоторой определенной незамкнутой или замкнутой области. Помощью четвертой опорной поверхности, нормаль къ которой въ точкѣ касанія къ тѣлу не параллельна первымъ тремъ нормалямъ, параметры этихъ винтовыхъ осей, по не области самыхъ осей, получаютъ ограниченіе по основному правилу § 4.

Если всё четыре нормали параллельны одной плоскости, то онѣ могутъ быть такъ расположены, что по перпендикулярному къ нимъ направленію не останется никакихъ возможныхъ осей простого вращенія. Это слѣдуетъ изъ того, что мы знаемъ относительно перемѣщеній твердаго тѣла параллельно плоскости *). Тогда по этому направленію останется возможнымъ только поступательное перемѣщеніе въ ту или другую сторону.

Пять опорныхъ поверхностей.

32. Условія для винтовыхъ скоростей. Число всѣхъ случаевъ, которые здѣсь можно себѣ представить по отношенію къ угловой скорости, равно 32. Подобно предыдущему, ихъ можно раздѣлить на шесть группъ; причемъ *1-ая группа* содержитъ только *одинъ случай*, когда угловая скорость образуетъ острые углы со всѣми пятью нормалями и слѣдовательно параметръ p не менѣе каждой изъ пяти величинъ:

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4, \quad \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5; \quad (55)$$

*) Reuleaux, Theoretische Kinematik, §§ 18, 19 и 20.

2-я группа соответствует пяти случаям, въ которыхъ p не больше одной изъ этихъ величинъ и не меньше остальныхъ;

3-я группа содержитъ десять случаевъ, въ которыхъ p не больше двухъ изъ величинъ (55) и не меньше остальныхъ;

4-я группа содержитъ тоже десять случаевъ, въ которыхъ p не превосходитъ трехъ изъ величинъ (55) и не меньше двухъ остальныхъ;

5-я группа состоитъ изъ пяти случаевъ, въ которыхъ p не меньше одной изъ величинъ (55) и не превосходитъ остальныхъ;

6-я группа состоитъ только изъ одного случая, для котораго p не превосходитъ ни одной изъ величинъ (55).

32 возможныхъ области можно опять разсматривать попарно, соединяя сопряженные области, которыя принадлежатъ соответственно группамъ 1-й и 6-й, 2-й и 5-й, 3-й и 4-й.

На самомъ дѣлѣ изъ 32 областей будутъ находиться въ наличности не болѣе 22 областей, какъ это слѣдуетъ изъ общей формулы (45), если въ ней положить $k=5$. Исчезающія такимъ образомъ 10 областей попарно сопряжены.

Уже разсматривая четыре опорныхъ поверхности, мы видѣли, что, давая порамалымъ подходящія направленія, можно уничтожить области первой и пятой группъ, въ которыхъ величина параметра возможной винтовой скорости находится *вне* нѣкоторыхъ предѣловъ. При помощи пяти опорныхъ поверхностей это и подавно можетъ быть достигнуто, и такимъ образомъ параметры всѣхъ возможныхъ осей могутъ быть заключены *между* нѣкоторыми, вообще говоря конечными предѣлами. Предполагая, что это сдѣлано, обратимся прямо къ остальнымъ четыремъ группамъ областей. Ни одна изъ этихъ группъ не можетъ уже цѣликомъ отсутствовать. Дѣйствительно, изъ полного числа 32 областей на сферѣ параметровъ не находится въ наличности 10 областей, изъ которыхъ двѣ области относятся къ 1-й и 6-й группамъ; изъ 8 остальныхъ исчезающихъ областей только 4 могутъ принадлежать къ одной и той-же группѣ, такъ какъ могутъ исчезать только области попарно сопряженные. А такъ какъ въ каждой изъ остальныхъ четырехъ группъ болѣе четырехъ различныхъ случаевъ, то каждая

группа областей непременно будет имѣть своихъ представителей.

33. Винтовые оси 2-й и 5-й группы и 3-й и 4-й группы. Такъ какъ всѣ пять принадлежащихъ 2-й и 5-й группѣ сопряженныхъ паръ областей одинаковы, отличался лишь нумераціею нормалей, то ограничимся разсмотрѣніемъ только одной пары, тѣмъ болѣе, что согласно предыдущему §, четыре пары областей, принадлежащихъ разсматриваемымъ группамъ, могутъ быть уничтожены надлежащимъ выборомъ направленій пяти нормалей. Для остающейся пары областей предположимъ существованіе слѣдующихъ двухъ группъ неравенствъ:

$$p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \geq \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5, \\ p \leq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4; \quad (56)$$

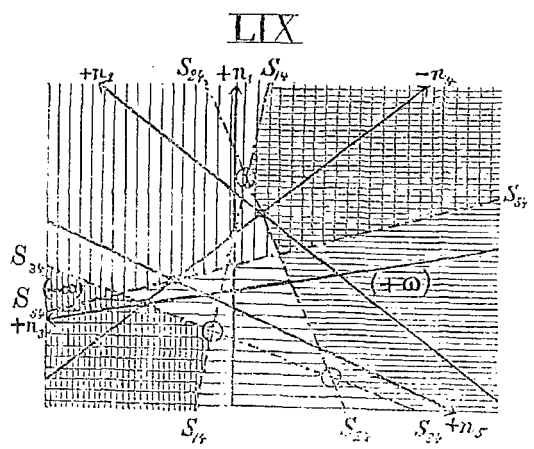
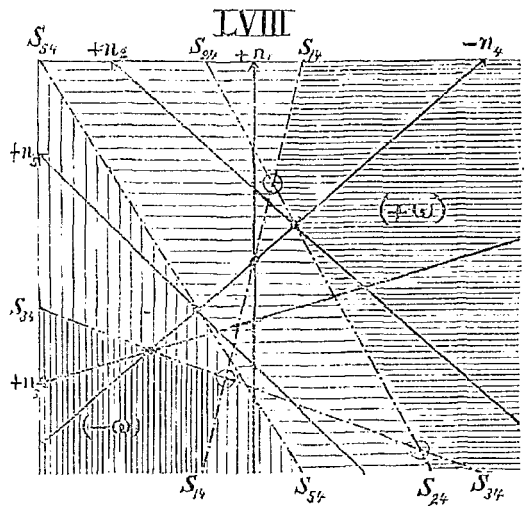
$$p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \leq \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5, \\ p \geq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4; \quad (57)$$

т. е. будемъ предполагать, что угловая скорость съ n_1, n_2, n_3 и n_5 образуетъ острые углы, а съ n_4 —тупой уголъ или, для сопряженной области, наоборотъ. Въ этомъ случаѣ можно воспользоваться составленными уже раньше чертежами XXXVII и XXXVIII, которые соответствуютъ 1-му, 2-му, 3-му и 5-му изъ неравенствъ каждой изъ этихъ двухъ системъ, сдѣлавъ только надлежащія добавленія въ зависимости отъ введенія нормали n_5 . Сдѣлаемъ эти добавленія на чертежѣ XXXVII. Области возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія, при введеніи пятой опорной поверхности и соответствующей ей нормали n_5 , могутъ: а) остаться безъ измѣненія, б) сократиться, в) одна—сдѣлаться конечною, а другая совсѣмъ исчезнуть и д) обѣ совсѣмъ исчезнуть. Который изъ этихъ случаевъ явится,—это будетъ зависѣть отъ направленія и положенія пятой нормали и зависящей отъ нея новой граничной плоскости S_{54} . Эти четыре случая изображены на чертежахъ LVIII, LIX, LX и LXI, гдѣ положеніе прямыхъ n_1, n_2, n_3 и n_4 съ соответствующими имъ знаками взято безъ измѣненія изъ чертежа XXXVII. До-

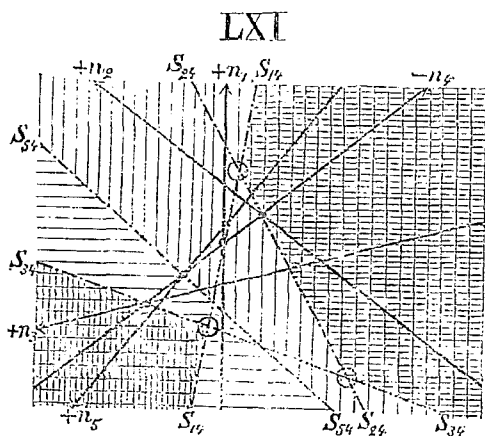
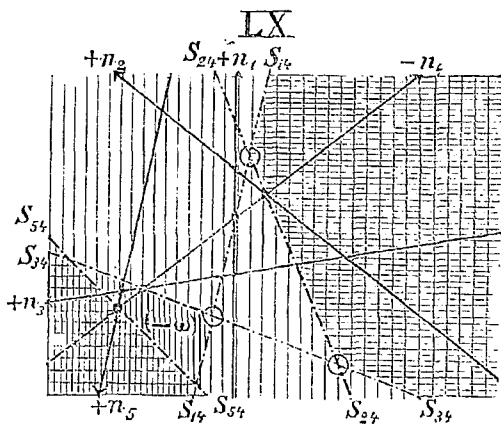
бавочная штриховка сделана здесь только в зависимости от положения прямой, изображающей граничную плоскость S_{54} .

Возможными остаются те области, в которых направления обих штриховок совпадают. Как должна быть проведена пятая нормаль и какое должно быть взято наклонение ее к данному направлению осей, чтобы S_{54} получила требуемое для этих четырех случаев положение, — это легко сообразить, пользуясь общим правилом § 10 для проведения слѣда граничной плоскости.

При направлениях угловой скорости, относящихся к одному из случаев 3-й группы и сопряженному с ним случаю 4-й группы, получим результаты, подобные предыдущим, которые поэтому подробнѣе разсматривать не будем. Принимая во внимание сказанное в § 25 о существовании, уже при четырех опорных поверхностях, таких направлений, по которым никакия винтовые оси не возможны, можно для случая пяти опорных поверхностей сделать такое общее заключение: Всегда можно направить и расположить пять нормалей так, что 1) параметры всехъ возможныхъ для твердаго



тѣла винтовыхъ осей будутъ заключены между нѣкоторыми, вообще говоря конечными предѣлами и 2) кромѣ того въ каждой изъ группъ, на которыя мы подраздѣлили винтовья оси по ихъ направленіямъ, найдутся такія направленія, что ни одна изъ системы параллельныхъ этому направленію прямыхъ не будетъ служить возможнымъ винтовой осью. Попятно, что и направленія достаточно близкія къ вышеуказаннымъ будутъ, въ предѣлахъ разсматриваемой на сферѣ параметровъ области, обладать тѣмъ-же свойствомъ.



перемѣщеній. Известно, что если не можетъ прекращаться касаніе твердаго тѣла къ пяти поверхностямъ, то для него остается возможною одна винтовая ось; если-же твердое тѣло только опирается на пять поверхностей, то въ перечисленныхъ выше группахъ направленій пайдутся такія направленія, по которымъ останутся возможными цѣлыя области винтовыхъ осей. Какимъ расположеніемъ нормалей можно было бы сдѣлать эти области возможно малыми, это могло-бы, какъ и вопросы, указанные въ концѣ § 25, составить предметъ особаго изслѣдованія.

34. Нѣкоторые частные случаи возможныхъ винтовыхъ осей при пяти опорныхъ поверхностяхъ. После подробнаго разбора винтовыхъ осей съ параметромъ, равнымъ нулю или безконечности, и винтовыхъ осей при частныхъ положеніяхъ нормалей для случая трехъ и четырехъ опорныхъ поверхностей, можно теперь ограничиться лишь нѣкоторыми краткими дополненіями.

Относительно осей, около которыхъ возможно простое вращеніе, мы уже знаемъ (§ 26), что при помощи четырехъ нормалей можно достигнуть уничтоженія осей вращенія даннаго и достаточно къ нему близкихъ направлений, къ какой-бы области на сферѣ параметровъ это направленіе ни принадлежало. Помощью пяти опорныхъ поверхностей это можетъ быть конечно достигнуто въ бѣльшей степени, т. е. на сферѣ параметровъ области невозможныхъ простыхъ вращеній могутъ быть расширены; но уничтоженіе простыхъ вращеній около всякихъ осей этимъ еще не достигается. Необходимое и достаточное для этого условіе состояло-бы въ томъ, чтобы при всякомъ направленіи винтовой оси и для всѣхъ прямыхъ этого направленія получалось для параметра p условіе, чтобы онъ былъ больше хотя-бы одной изъ величинъ (55), имѣющей положительное значеніе, или меньше хотя-бы одной изъ этихъ величинъ, имѣющей отрицательное значеніе; такъ какъ только тогда для него не будутъ возможны значенія, равныя нулю. Въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей это въ наибольшей степени достигается при параллельномъ расположеніи четырехъ нормалей (§ 29), причемъ остаются возможными вращенія только около осей, этимъ нормалямъ параллельныхъ. Но эти послѣднія вращенія не могутъ быть уничтожены одною пятою нормалью: остаются возможными вращенія около тѣхъ осей указаннаго направленія, которые лежатъ по одну сторону плоскости, проведенной черезъ пятую нормаль параллельно первымъ четыремъ нормалямъ. При иномъ-же расположеніи нормалей остаются на шарѣ параметровъ цѣлыя области направлений возможныхъ осей вращенія, которые и подавно не могутъ быть уничтожены введеніемъ пятой опорной поверхности.

Въ концѣ § 29 было указано, какое ограниченіе производитъ присоединеніе какой-нибудь четвертой нормали къ тремъ параллельнымъ и лежащимъ въ одной плоскости нормалямъ. Если теперь будетъ введена пятая нормаль, лежащая на одной прямой съ четвертою нормалю, но противоположно ей направленная, то дѣйствіе ея будетъ состоять въ ограниченіи, обратномъ тому, которое достигалось четвертою нормалю; поэтому по всякому направленію, параллельному плоскости трехъ первыхъ нормалей, останутся возможными только такія винтовые оси, которыя лежатъ въ указанной тамъ граничной плоскости. Простыя вращенія будутъ возможны только около осей, лежащихъ въ плоскости первыхъ трехъ нормалей и пересѣкающихъ остальные двѣ нормали, или также около осей, параллельныхъ первымъ тремъ нормалямъ и пересѣкающихъ двѣ другія. Поступательныя-же перемѣщенія будутъ возможны только перпендикулярныя ко всѣмъ пяти нормалямъ, въ ту и въ другую сторону.

Если четвертую и пятую нормали помѣстить въ плоскости первыхъ трехъ нормалей, на одной не параллельной къ нимъ прямой и направить противоположно другъ-другу, то твердое тѣло лишится всякихъ винтовыхъ перемѣщеній съ конечнымъ и неравнымъ нулю параметромъ; возможны будутъ только простыя вращенія около осей, лежащихъ въ плоскости пяти нормалей и перпендикулярное къ нимъ поступательное перемѣщеніе.

Если четвертую и пятую нормали задать противоположно другъ-другу, но не лежащими на одной прямой и не въ плоскости первыхъ трехъ нормалей, то область возможныхъ винтовыхъ перемѣщеній, а также въ частности область осей простого вращенія опять расширится; такъ-что стѣсненіе твердаго тѣла становится меньше, чѣмъ это было въ двухъ предыдущихъ случаяхъ.

Шесть опорныхъ поверхностей.

35. Общій случай шести опорныхъ поверхностей.

Не дѣлая для общаго случая разбора, подобнаго тому, который дѣлался при меньшемъ числѣ опорныхъ поверхностей, ограничимся немногими замѣчаніями. Число всѣхъ возможныхъ случаевъ въ зависимости отъ шести неравенствъ, которымъ подчиняется параметръ винтовой скорости, будетъ теперь 64. Эти случаи, подобно предыдущему, можно раздѣлить на группы, сообразно съ числомъ тѣхъ нормалей, съ которыми данная угловая скорость образуетъ острые углы. Такихъ группъ теперь семь; причѣмъ сопряженными будутъ соответственно области 1-й и 7-й, 2-й и 6-й, 3-й и 5-й группъ, а области 4-й группы будутъ попарно сопряженны; число-же случаевъ, представляющихся въ семи группахъ, по порядку слѣдующее: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Если припятъ во вниманіе, что на сферѣ параметровъ изъ числа 64 случаевъ въ наличности будетъ находится, по формулѣ (45), не болѣе 32, то можно шесть нормалей направить такимъ образомъ, чтобы всѣ области четырехъ группъ 1-й, 2-й, 6-й и 7-й отсутствовали. Кромѣ того еще пропадутъ нѣкоторые попарно сопряженные области 3-й и 5-й группъ, но во всякомъ случаѣ какъ эти такъ и 4-я группа будутъ имѣть своихъ представителей.

Уже для случая пяти опорныхъ поверхностей была указана возможность направить и расположить нормали такимъ образомъ, чтобы въ каждой изъ остающихся возможными группъ областей существовали направленія, по которымъ никакія винтовые перемѣщенія не возможны. Хотя при шести опорныхъ поверхностяхъ это достигается еще въ болѣе степеней, но полное уничтоженіе всякихъ перемѣщеній еще не возможно. Когда твердое тѣло подчинено пяти *удерживающимъ* связямъ, напр. не можетъ прекращать своего касанія къ пяти поверхностямъ, то для него остается возможнымъ одно опредѣленное винтовое перемѣщеніе; въ дѣйствительности-же, при пяти *опорныхъ* поверхностяхъ для него остаются возможными дѣлая об-

масти винтовых осей. Но если-бы даже и можно было помощью пяти опорных поверхностей заставить твердое тѣло имѣть только одно опредѣленное винтовое перемѣщеніе, то и тогда одной шестой опорной поверхности было-бы недостаточно для уничтоженія этого винтового перемѣщенія. Въ случаѣ пяти удерживающихъ связей, остающееся возможнымъ винтовое перемѣщеніе можетъ происходить въ обѣ стороны, т. е. угловая и поступательная скорости могутъ одновременно мѣнять свой знакъ, такъ какъ пять условій связей даютъ опредѣленные значенія для отношеній пяти координатъ винтовой скорости къ шестой, и поэтому условія связей отъ перемѣны знака въ числитель и знаменатель этихъ отношеній не нарушаются. Шестая опорная поверхность можетъ въ этомъ случаѣ преградить тѣлу винтовое перемѣщеніе только въ одну сторону, а въ обратную сторону оно непременно останется возможнымъ. Седьмая опорная могла-бы уничтожить и это послѣднее перемѣщеніе, если-бы пять опорныхъ поверхностей дѣйствительно могли представлять собою пять удерживающихъ связей.

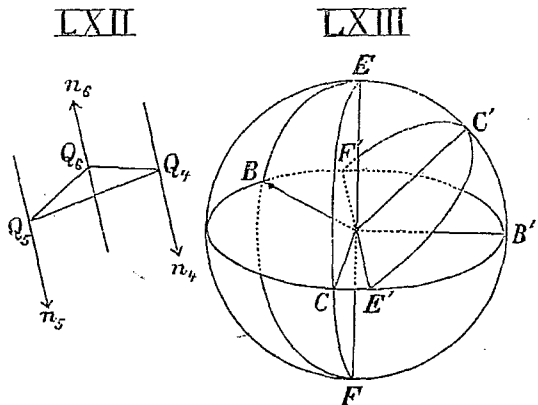
36. Нѣкоторые частные случаи шести опорныхъ поверхностей. Относительно расположенія нормалей къ шести опорнымъ поверхностямъ отмѣтимъ нѣсколько частныхъ случаевъ, представляющихъ нѣкоторые особенности.

а) Мы знаемъ, что при четырехъ параллельныхъ нормаляхъ можно заставить тѣло имѣть только перемѣщенія параллельно плоскости (§ 30), а помощью двухъ противоположно направленныхъ нормалей, лежащихъ на одной прямой, можно уничтожить всякія *простыя* вращенія около осей, не пересѣкающихъ эти нормали, и всякія ^{не} перпендикулярныя къ ~~нимъ~~ ^{послѣднимъ} поступательныя перемѣщенія (§ 13). Поэтому, если двѣ послѣднихъ нормали задать на прямой, какъ-нибудь наклоненной къ первымъ четыремъ нормалямъ, то для тѣла, изъ его перемѣщеній параллельно плоскости, останутся возможными: вращенія около осей, параллельныхъ первымъ четыремъ нормалямъ и пересѣкающихъ двѣ послѣднихъ, и поступательное перемѣщеніе, перпендикулярное ко всѣмъ шести нормалямъ. Такъ какъ это поступательное перемѣщеніе перпендикулярно

въ плоскости остающихся возможными параллельныхъ между собою осей вращенія, то оно можетъ быть всегда замѣнено парой вращеній около двухъ изъ этихъ осей и слѣдовательно никакого самостоятельнаго значенія не имѣетъ. Здѣсь мы имѣемъ примѣръ тѣла, обладающаго двумя степенями свободы.

б) Въ § 20 былъ разобранъ случай трехъ параллельныхъ нормалей, изъ которыхъ одна, n_3 , направлена противоположно двумъ другимъ, n_1 и n_2 . Возможныя направленія угловыхъ скоростей винтового перемѣщенія опредѣлялись тамъ областью *ЕВСFЕ* (XXXIII), заключенною между двумя большими полукругами, плоскости которыхъ параллельны плоскостямъ (n_1, n_2) и (n_2, n_3) . Около всѣхъ осей такого направленія было возможно винтовое перемѣщеніе съ параметромъ, заключеннымъ для каждой оси между нѣкоторыми предѣлами, и съ однимъ только направленіемъ вращенія. Возьмемъ три новыхъ параллельныхъ между собою нормали n_4, n_5, n_6 изъ которыхъ послѣдняя противоположна двумъ первымъ. Этимъ нормалямъ будетъ на сферѣ XXXIII тоже соответствовать ограниченная двумя полукругами область возможныхъ угловыхъ скоростей винтового перемѣщенія, которая можетъ или отчасти совпадать съ областью *ЕВСFЕ* или совсѣмъ не имѣть съ нею общихъ точекъ. Въ послѣднемъ случаѣ, при существованіи одно-

временно всѣхъ шести нормалей, вовсе не будетъ возможныхъ направленій угловой скорости; слѣдовательно не останется никакихъ возможныхъ винтовыхъ скоростей конечнаго параметра. Такой случай изображенъ на чертежахъ LXII и LXIII, изъ которыхъ



первый нужно разсматривать одновременно съ чертежомъ XXXII, а второй представляетъ дополненіе чертежа XXXIII

сферическимъ двухстороннимъ $E' B' C' F' E'$, содержащимъ область направлений, возможныхъ при существованіи отдѣльно взятыхъ нормалей n_4, n_5, n_6 . Эти нормали взяты перпендикулярными къ первымъ тремъ нормалямъ. Но этимъ расположеніемъ нормалей, какъ и вообще помощью шести опорныхъ поверхностей, полного закрѣпленія твердаго тѣла не достигается: остается возможнымъ поступательное перемѣщеніе, перпендикулярное ко всѣмъ шести нормалямъ, и притомъ въ обѣ стороны.

в) Замѣтимъ систему возможныхъ винтовыхъ осей, когда три нормали параллельны между собою, лежатъ въ одной плоскости и средняя изъ нихъ противоположна двумъ другимъ (§ 20). Введя еще три опорныхъ поверхности, нормали которыхъ въ точкахъ ихъ касанія къ твердому тѣлу расположены подобнымъ же образомъ, но лежатъ въ другой плоскости, наклоненной къ плоскости первыхъ трехъ нормалей, мы ограничимъ систему возможныхъ винтовыхъ осей слѣдующимъ образомъ. При трехъ такихъ нормаляхъ возможны винтовые скорости только около осей, которыя параллельны ихъ плоскости; поэтому теперь онѣ будутъ возможны только по одному направленію, параллельному обѣимъ плоскостямъ нормалей. Притомъ, такъ какъ при одной тройкѣ нормалей параметръ имѣетъ на каждой оси одно опредѣленное значеніе, то при двухъ тройкахъ нормалей возможная винтовая ось должна находиться въ той граничной плоскости, для которой равны между собою величины $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4, \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5, \delta_6 \operatorname{tg} \varphi_6$ равны величинамъ $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$. Кромѣ этихъ перемѣщеній возможно еще поступательное, перпендикулярное ко всѣмъ шести нормалямъ.

Въ частности, если нормали n_4, n_5, n_6 параллельны линіи пересѣченія ихъ плоскости съ плоскостью первыхъ трехъ нормалей, то вышеуказанная граничная плоскость приходитъ въ совпаденіе съ послѣднею плоскостью; тогда всѣ возможные для тѣла винтовые оси обрацуются въ оси простыхъ вращеній, а поступательное перемѣщеніе, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, остается возможнымъ по направленію, къ нимъ перпендикулярному.

Если всё шесть нормалей перпендикулярны къ линіи пересѣченія ихъ плоскостей, то для тѣла будетъ только возможно винтовое перемѣщеніе около этой прямой съ произвольною величиною параметра, такъ какъ для всѣхъ другихъ осей, параллельныхъ плоскостямъ нормалей, параметръ можетъ равняться только безконечности, а вращеніе невозможно.

г) Пусть нормали (n_1, n_4) , (n_2, n_5) и (n_3, n_6) попарно лежатъ на одной прямой и противоположно направлены. Для изслѣдованія этого случая можно обратиться къ чертежу XVI, § 14. Положимъ, что этотъ чертежъ изображаетъ распределеніе областей, соотвѣствующихъ тремъ нормалямъ n_1, n_2, n_3 ; тѣ-же области будутъ соотвѣтствовать и тремъ остальнымъ нормалямъ n_4, n_5, n_6 ; но только знаки неравенствъ, которымъ въ этихъ областяхъ удовлетворяетъ параметръ p , будутъ соотвѣтственно противоположны знакамъ неравенствъ (32), ... (39); Отсюда слѣдуетъ, что для всякой винтовой оси, если она вообще возможна, параметръ долженъ имѣть одно опредѣленное значеніе $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$ или $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$ или $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_6 \operatorname{tg} \varphi_6$. Поэтому возможными винтовыми осями могутъ быть только тѣ, для которыхъ эти три величины равны между собою. Возьмемъ направленіе винтовыхъ осей, принадлежащее какой-нибудь изъ 8 областей чертежа XVI, и сдѣлаемъ плоскостное изображеніе по правилу, введенному въ § 10. Чтобы не дѣлать лишняго чертежа, обратимся къ чертежу XVIII, сдѣланному для сопряженныхъ областей BDC и AEF ; нижеслѣдующія разсужденія будутъ одинаково приложимы и къ другимъ областямъ. Величины $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$, $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ могутъ быть равны только для тѣхъ осей, которыя лежатъ въ области (+ + +) или (— — —); а такъ какъ граничная плоскость содержитъ такія оси, для которыхъ двѣ изъ указанныхъ величинъ равны, то очевидно, что искомая ось будетъ находиться въ пересѣченіи двухъ граничныхъ плоскостей. Для всякаго направленія найдется одна такая ось. Такимъ образомъ, при разсматриваемомъ частномъ расположеніи шести нормалей, по всякому направленію существуетъ одна возможная винтовая ось съ опредѣленною величиною параметра; причемъ перемѣщеніе около

ней можетъ происходить въ обѣ стороны, такъ какъ эта ось одновременно принадлежитъ областямъ $(+\omega)$ и $(-\omega)$ (XVIII).

Въ настоящемъ случаѣ твердое тѣло, опираясь на три поверхности, которымъ соотвѣтствуютъ нормали n_1, n_2, n_3 , не можетъ отходить отъ этихъ поверхностей вслѣдствіе присутствія трехъ остальныхъ поверхностей, нормали къ которымъ прямо противоположны первымъ тремъ нормальямъ. Поэтому здѣсь представляется случай, когда твердое тѣло обладаетъ тремя степенями свободы. Извѣстно, что система возможныхъ винтовыхъ осей, соотвѣтствующая тремъ степенямъ свободы, слагается изъ производящихъ одного рода системы соосныхъ гиперболоидовъ, изъ которыхъ каждый содержитъ винтовую ось съ одинаковою величиною параметра. Къ этимъ производящимъ гиперболоидовъ принадлежитъ и найденная выше винтовая ось. Итакъ вышеуказанное построеніе точки пересѣченія двухъ граничныхъ плоскостей (по правилу § 10) даетъ средство для случая трехъ степеней свободы отыскать возможную ось какаго-либо напередъ заданнаго направленія и вмѣстѣ съ тѣмъ найти величину соотвѣтствующаго ей параметра.

Если-бы каждая пара противоположно направленныхъ нормалей не лежала на одной прямой, то области возможныхъ винтовыхъ осей расширились-бы, такъ какъ для даннаго направленія, — хотя, правда, и не всякаго, — оставались-бы цѣлыя области возможныхъ винтовыхъ осей, и параметры винтовой скорости на этихъ осяхъ не имѣли-бы опредѣленныхъ значеній, а заключались-бы лишь между нѣкоторыми предѣлами.

Семь и болѣе опорныхъ поверхностей.

37. Области направленій возможныхъ винтовыхъ осей и нѣкоторые частные случаи. Въ случаѣ нечетнаго числа, $2n+1$, опорныхъ поверхностей, превосходящаго шесть, нормали къ нимъ могутъ быть такъ расположены, что изъ $2n+2$ группъ, на которыя могутъ быть, подобно предшествующимъ случаямъ, подраздѣлены неравенства для параметра

винтовой скорости, останутся двѣ среднія, содержащія попарно сопряженные случаи. Если-же число опорныхъ поверхностей, превосходящее шесть, будетъ четное, то нормали къ нимъ могутъ быть расположены такъ, чтобы оставалась возможною одна средняя группа, т. е. чтобы всякое направленіе винтовой оси со столькими-же нормальми образовало тупые углы, со сколькими нормальми оно образуетъ острые углы *). А именно, по формулѣ (45), число областей на сферѣ параметровъ для k опорныхъ поверхностей равно $A_k = k(k-1) + 2$, а число случаевъ въ каждой изъ среднихъ группъ при $k = 2n + 1$ будетъ равно числу сочетаній изъ $2n + 1$ элементовъ по n ; но при $n > 2$ число этихъ сочетаній превосходитъ $A_k/2$. Если-же $k = 2n$ и $n > 3$, то число случаевъ средней группы, равное числу сочетаній изъ $2n$ элементовъ по n , превосходитъ число A_k . При направленіи нормалей, удовлетворяющихъ указаннымъ условіямъ, параметры всѣхъ возможныхъ винтовыхъ осей будутъ не только заключены между нѣкоторыми, вообще говоря, конечными предѣлами, но также области возможныхъ осей будутъ, при одинаковыхъ остальныхъ условіяхъ, болѣе стѣснены, чѣмъ при существованіи пныхъ группъ кромѣ среднихъ.

Не повторяя приѣмовъ, которые ведутъ къ опредѣленію этихъ областей при данномъ положеніи семи, восьми или болѣе нормалей, остановимся еще на вопросѣ о закрѣпленіи твердаго тѣла опорными поверхностями. Наибольшее стѣсненіе твердаго тѣла при помощи шести опорныхъ поверхностей состоятъ въ томъ, что у него остается возможнымъ одно опредѣленное винтовое перемѣщеніе, и притомъ въ обѣ стороны. Въ настоящей статьѣ былъ указанъ одинъ частный случай этого (§ 36, б), состоявшій въ томъ, что оставалось возможнымъ поступательное перемѣщеніе параллельно прямой опредѣленнаго направленія, которое могло притомъ происходить въ обѣ

*) Прямой уголъ приходится здѣсь, смотря по обстоятельствамъ, разсматривать или какъ предѣльную величину острого или какъ предѣльную величину тупого угла.

стороны. Отсюда слѣдуетъ, что одной седьмой опорной поверхности недостаточно для лишенія твердаго тѣла всякой свободы, но что это можетъ быть достигнуто помощью восьми опорныхъ поверхностей. Въ заключеніе приведемъ нѣсколько частныхъ примѣровъ на послѣдній случай.

а) Помощью четырехъ опорныхъ поверхностей, расположенныхъ такъ, что нормали къ нимъ въ точкѣ касанія твердаго тѣла между собою параллельны, можно заставить тѣло имѣть перемѣщенія только параллельно данной плоскости, причемъ это можетъ быть достигнуто двоякимъ образомъ (§ 30). Съ другой стороны извѣстно, что если плоская фигура можетъ двигаться только въ своей плоскости, то ее можно вполне закрѣпить помощью четырехъ опорныхъ кривыхъ *). Отсюда видно, что можно закрѣпить твердое тѣло, взявъ четыре нормали между собою параллельными, а четыре другимъ нормали перпендикулярными къ предыдущимъ и расположивъ конечно всѣ нормали надлежащимъ образомъ. Въмѣсто четырехъ послѣднихъ нормалей можно было-бы взять четыре нормали параллельно плоскости, какъ нибудь наклоненной къ первымъ четыремъ нормалямъ.

б) Въ § 36, б) былъ указанъ случай, когда при шести опорныхъ поверхностяхъ для твердаго тѣла остается возможнымъ только поступательное перемѣщеніе по двумъ противоположеннымъ направленіямъ. Это перемѣщеніе очевидно можетъ быть уничтожено двумя дополнительными опорными поверхностями.

в) Помощью четырехъ опорныхъ поверхностей, если нормали ихъ въ точкахъ касанія къ твердому тѣлу пересѣкаются въ одной точкѣ и удовлетворяютъ условію, чтобы на шарѣ параметровъ не было областей первой и пятой группъ (§ 21), можно заставить твердое тѣло имѣть только простыя вращенія около точки пересѣченія нормалей (§ 26). Съ другой стороны, помощью четырехъ сферическихкихъ опорныхъ кривыхъ можно сдѣлать неподвижною сферическую фигуру, двигающуюся по

*) *Reuleaux*, Theoretische Kinematik, стр. 113.

поверхности соответствующаго ей шара. Въ этомъ можно убѣдиться соображеніями, вполне аналогичными тѣмъ, которыя приведены у *Reuleux* для плоской фигуры (*Theoretische Kinematik*, стр. 113). Слѣдовательно помощью надлежащимъ образомъ расположенныхъ четырехъ опорныхъ поверхностей можно сдѣлать неподвижнымъ твердое тѣло, которое раньше имѣло неподвижную точку. Такимъ образомъ опять помощью восьми опорныхъ поверхностей достигается полное закрѣпленіе твердаго тѣла.

Настоящая статья, имѣвшая прежде всего цѣлью указать приемы для изслѣдованія, по возможности нагляднымъ путемъ, винтовыхъ осей твердаго тѣла, связи котораго выражаются неравенствами, далеко не исчерпываетъ весьма обширнаго вопроса объ опорныхъ поверхностяхъ вообще. Поэтому результаты здѣсь приведенные, — главнымъ образомъ, когда число опорныхъ поверхностей болѣе трехъ, — не претендуютъ на полноту. Нѣкоторыя стороны задачи, напр. тѣ, въ которыхъ играетъ роль кривизна поверхностей, ведущія къ спеціальнымъ, чисто геометрическимъ изслѣдованіямъ, были съ самаго начала устранены (§ 3); а нѣкоторыя другія ея стороны, болѣе кинематическаго характера, только отчасти затронуты и могутъ послужить предметомъ отдѣльныхъ изслѣдованій. Сюда относятся между прочимъ вопросы: о границахъ, въ которыхъ заключены на сферѣ параметровъ направленія осей, не допускающихъ при данномъ числѣ опорныхъ поверхностей никакихъ винтовыхъ скоростей, болѣе обстоятельное изслѣдованіе вопроса о полномъ закрѣпленіи твердаго тѣла помощью наименьшаго числа опорныхъ поверхностей, а также болѣе полный разборъ винтовыхъ осей для случая, когда нормали къ четыремъ или болѣе опорнымъ поверхностямъ имѣютъ какиа-либо особенныя относителныя положенія.